THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Bernard LEMAIRE

1ère thèse : PROBLEMES MIN-MAX ET APPLICATIONS AU CONTROLE OPTIMAL DE SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES.

2ème thèse : Propositions données par la Faculté.

2 5 SEP. 1970

Soutenues le octobre 1970 devant la Commission d'Examen.

MM. J.L. LIONS Président

Y. HAUGAZEAU
P. PRIOURET } Examinateurs

CNRS
AO 4878

Université de Montpellier
Secrétariat des Mathématiques
Publication N° 89

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551512_0021

THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Bernard LEMAIRE

1ère thèse : PROBLEMES MIN-MAX ET APPLICATIONS AU CONTROLE OPTIMAL DE SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES.

2ème thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le octobre 1970 devant la Commission d'Examen.

MM. J.L. LIONS Président

Y. HAUGAZEAU, P. PRIOURET } Examinateurs

Université de Montpellier
Secrétariat des Mathématiques
Publication N° 89

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

à Catherine, ma femme à qui je dois tant.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de M. J.L. LIONS qui m'en a proposé le sujet et dont les conseils et les encouragements m'ont toujours été très précieux. Je tiens à lui exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Je remercie MM. Y. HAUGAZEAU et P. PRIOURET pour leur participation au jury.

Mes remerciements vont également à MM. P. LEMONNIER et A. JAKUBOWICZ qui se sont chargés de la programmation des essais numériques.

Je remercie M. B. CHARLES qui m'a donné toutes facilités pour mener ce travail à terme.

L'impression est l'oeuvre du secrétariat des Mathématiques de la Faculté des Sciences de Montpellier. Je remercie particulièrement Mme MORI pour sa dactylographie rapide et soignée.

E R R A T A

ooOoo

Pages	Lignes	au lieu de	lire
9	1,2	n'est pas symétrique	est non positive ou non symétrique
13	22	(4.13)	(4.15)
19	5	borné $\mathbb{R}^n$	borné de $\mathbb{R}^n$
"	7	v_1, v_2	V_1, V_2
22	25	$\lim J(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$	$\lim J(u_{1\varepsilon}, u_2)$
27	12	S_{opt}	ρ_{opt}
37	28	$= J'_u(u, v; -k)$	$= - J'_u(u, v; -k)$
43	2	V	$\ddot{V}$
63	14	z (v_1, v_2) qui est une fonction	z (v_1, v_2) qui est fonction
67	9	(1.18)	(1.19)
108	22	(1.10)	(1.19)
109	dernière	$\rho \leq \varphi(\varepsilon)$	$0 < \varphi \leq \rho(\varepsilon)$
112	11	$\mathcal{E}$ opérateur linéaire continu	$\mathcal{E}$ opérateur continu
124	9	$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \sup_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \tau(v, \bar{\omega})$	$\inf_{v \in \mathcal{U}^E_{ad}} \sup_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \tau(v, \bar{\omega})$
"	22	$\mathcal{U}^\varepsilon_{ad} \subset \mathcal{U}$	$\mathcal{U}^\varepsilon_{ad} \subset \mathcal{U}_{ad}$
125	20,21	donc dans H faible .. .. $y(\tau'; v, \bar{\omega})$ dans H faible.	Par conséquent $y(\tau_n; v_n, \bar{\omega})$ tend vers $y(\tau'; v, \bar{\omega})$ faible donc dans H faible car V est dense dans H et, d'après (3.8), $y(\tau_n, v_n, \bar{\omega})$ est borné dans H.
"	25,26	En effet ...	...
"	29	Soit $\bar{\omega}$	En effet, soit $\bar{\omega}$

126	9	quelconque au lieu	quelconque de H au lieu
"	10	et	ou
129	15	(1.6)	(1.7)
133	21	$\nu_2 = 10$	$\nu_2 = 100$
"	22	$f(x) = \frac{9}{10}\, x(x-1)-4$	$f(x) = \frac{99}{100}\, x(x-1)-4$
"	27	$u_2\,(x) = \frac{1}{10}\,(x^2-x)$	$u_2\,(x) = \frac{1}{100}\,(x^2-x)$
"	28	= 4.03	= 4.033
134	13	h fixé et en	h fixé (=0.05) et en
135	6,17	h = 0.1 ou 0.2	h = 0.1 ou 0.05
"	12,16,19 22	h = 0.2	h = 0.05
105	19	remarque 2.1	remarque 2.5
119	1	Remarque 2.1.	Remarque 2.4.
122	28	Remarque 2.1.	Remarque 2.5.
123	6	Remarque 2.2.	Remarque 2.6.

ERRATA (2)

ooOoo

Pages	Lignes	au lieu de	lire
7	11	$\eta_\varepsilon(u;v) \geqslant \alpha_\varepsilon \|\|v\|\|^2$	$\eta_\varepsilon(v;v) \geqslant \alpha_\varepsilon \|\|v\|\|^2$
16	5 du bas	(4.10)	(4.19)
19	7	$v_1 = \ldots$, $v_2 = \ldots$	$V_1 = \ldots$, $V_2 = \ldots$
52	18	réflexif réel.	réel de dimension finie.
53	6	... K est faiblement compact	... K est compact.
"	17	... compact faible de U ...	... compact de U...
"	18	... converge faiblement vers	... converge vers ...
"	4 du bas	faiblement vers w	vers w
56	22	... convexe fermé borné	... convexe fermé
59	14	$\mathcal{L}(W_h, W)$	$\mathcal{L}(W_k, W)$
"	15	V_h, ... W_h ,	V_k, ... W_k ,
73	13	$A^*p(u_1,u_2) = y(u_1,u_2)$	$A^*p(u_1,u_2) = 0$
77	4 du bas	(1.16), (1.17)	(1.21), (1.22)
81	18	On pose $z_{d_1} = \ldots$	On pose $z_d = \ldots$
"	3 du bas	$\sigma^2 = \|\|\beta_2\|\|^2 \ldots$	$\sigma^2 = \|\|B_2\|\|^2 \ldots$
84	16	(5.4) ... $= \int_\Omega aij \ldots$	(5.4.)... $= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega aij \ldots$
86	9 du bas	$u_2 = \frac{p}{v_2}$	(5.21) $u_2 = \frac{p}{v_2}$
"	6 du bas	(5.19)	(5.22)
"	2 du bas	(5.20)	(5.23)
87	1	(5.18) - (5.19)	(5.21) - (5.22)
"	5	(5.20)	(5.23)
"	8	(5.21)	(5.24)
"	11	(5.22)	(5.25)
90	3	... Λ_Γ ...	... Λ_F ...
94	11 du bas	(6.34)	(6.36)
114	1,2 du bas	... $v)_{\mathcal{U}} \geqslant 0$	... $v)_{\mathcal{U}} \geqslant 0$ } $\forall v \in \mathcal{U}$
		... $v)_{\mathcal{U}} \geqslant 0$	... $v)_{\mathcal{U}} \geqslant 0$

115	5	dans (2.5)	dans (2.5) et (2.8)
"	7, 8, 9	remplacer par	

$$(2.25)\quad \begin{cases} \text{trouver } \bar{\omega}^* \in \mathcal{P}_{tol} \text{ et } p \quad L^2(0, T ; V) \text{ tels que} \\ \|C\, y(\bar{\omega}^*) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} = \max\limits_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \|C\, y(\bar{\omega}) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} \\ \dfrac{dy(\bar{\omega})}{dt} + A(t)\, y(\bar{\omega}) + B\, N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p = \mathcal{C}(\bar{\omega}),\ y(0, \bar{\omega}) = y_o,\ \forall\, \bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol} \\ -\dfrac{dp}{dt} + A(t)^* p - C^* \Lambda C\, y(\bar{\omega}^*) = - C^* \Lambda z_d\ ,\ p(T) = 0. \end{cases}$$

115	10	... par (2.24)	... par $u = - N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}} B^* p$.
116	12	... dans (2.26)	dans (2.26) et (2.27)
"	13	... le problème :	... le problème en $(\bar{\omega}^*, p)$.
"	14 à 19	remplacer par	

$$(2.30)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_Q |y(\bar{\omega}^*) - z_d|^2\, dx\, dt = \max_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \int_Q |y(\bar{\omega} - z_d)|^2\, dx\, dt \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y(\bar{\omega})}{\partial t} + A(t)\, y(\bar{\omega}) + \dfrac{1}{\nu}\, p = \bar{\omega} \quad \text{dans } Q \\ y(\bar{\omega}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma\ ,\ y(x, 0 ; \bar{\omega}) = y_o(x) \quad \text{dans } \Omega \end{array}\right\} \forall\, \bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A(t)^* p - y(\bar{\omega}^*) = - z_d \quad \text{dans } Q \\ p = 0 \quad \text{sur } \Sigma\ ,\ p(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

116	20	... solution unique $\bar{\omega}^*$	... solution unique $\bar{\omega}^* \in \mathcal{P}_{tol}$, $p \in L^2(0, T ; H_0^1(\Omega))$.
"	22	$u = \frac{1}{\nu}\, p(\bar{\omega}^*)$	$u = - \frac{1}{\nu}\, p$
117	1 à 7 du bas	remplacer par	

$$(2.35)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma |y(\bar{\omega}^*) - z_d|^2\, d\Sigma = \max_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \int_\Sigma |y(\bar{\omega}) - z_d|^2\, d\Sigma \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial y}{\partial t}(\bar{\omega}) + \bar{A}(t)\, y(\bar{\omega}) = \bar{\omega} & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}(\bar{\omega}) + \dfrac{1}{\nu}\, p = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0 ; \bar{\omega}) = y_o(x) & \text{dans } \Omega \end{array}\right\} \forall\, \bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A(t)^*\, p = 0 \quad \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} - y(\bar{\omega}^*) = - z_d \quad \text{sur } \Sigma,\ p(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

118	1	... $\bar{\omega}^*$	... $(\bar{\omega}^*, p)$.
"	3	$u = \frac{1}{\nu} p(\bar{\omega}^*)$	$u = -\frac{1}{\nu} p$
121	2	(2.53) $\mathcal{P}_\varepsilon(u_\varepsilon) =$	(2.53) $\mathcal{P}_\eta(u_\varepsilon) =$
"	10 du bas	$\{q_\zeta \mathcal{U}_\varepsilon\}$	$\{q_\zeta u_\varepsilon\}$

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION GENERALE

Soient K_1 et K_2 deux ensembles et J une fonction numérique finie définie sur $K_1 \times K_2$. On considère les problèmes suivants :

PROBLEME 1 (Pb 1). Trouver $u_1 \in K_1$ tel que

$$(0.1) \qquad \sup J(u_1, v_2) = \inf \sup J(v_1, v_2) \overset{\text{def}}{=} \bar{\delta} \qquad (^1),$$

PROBLEME 2 (Pb 2). Trouver $u_2 \in K_2$ tel que

$$(0.2) \qquad \inf J(v_1, u_2) = \sup \inf J(v_1, v_2) \overset{\text{def}}{=} \underline{\delta} ,$$

PROBLEME 3 (Pb 3). Trouver $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$ tel que

$$(0.3) \qquad J(u_1, v_2) \leq J(u_1, u_2) \leq J(v_1, u_2) , \ \forall v_1 \in K_1 , \ \forall v_2 \in K_2 .$$

Pb 1, Pb 2, Pb 3 sont des problèmes bien connus en théorie classique des jeux à deux personnes et à somme nulle ([33], [65]). Pb 3 est le problème du col ou du point de selle, un couple (u_1, u_2) solution de Pb 3 étant dit col ou point de selle de J sur $K_1 \times K_2$.

Rappelons l'inégalité classique

$$(0.4) \qquad \underline{\delta} \leq \bar{\delta}$$

Rappelons également (pour une démonstration cf. [33], [38]) que si $\underline{\delta} = \bar{\delta}$ alors tout couple $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$ où u_1(resp. u_2) est solution de Pb_1 (resp. de Pb 2), est un point de selle de J sur $K_1 \times K_2$ et que, réciproquement, si (u_1, u_2) est un point de selle alors $\underline{\delta} = \bar{\delta} = J(u_1, u_2)$ et u_1(resp. u_2) est solution de Pb 1 (resp. Pb 2). Autrement dit, Pb 1 et Pb 2 implique Pb 3 si $\underline{\delta} = \bar{\delta}$, mais Pb 3 implique toujours Pb 1 et Pb 2.

L'objet de ce travail est d'étudier les Pb 1, Pb 2, Pb 3 par les méthodes de l'Analyse fonctionnelle et d'appliquer les résultats ainsi obtenus à certains problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles qui n'ont, à notre connaissance, pas ou peu été abordés auparavant.

---

(1) Sauf indication du contraire, le sup ou le max (resp inf ou min) sera toujours à prendre sur $v_2 \in K_2$ (resp. $v_1 \in K_1$).

Au chapitre I, nous étudions le Pb 3 lorsque K_1 et K_2 sont des sous-ensembles convexes fermés d'espaces de Banach en nous attachant à l'aspect constructif des méthodes utilisées. Dans ce chapitre, apparaît d'une façon naturelle le problème de deux inéquations variationnelles couplées. Celui-ci est alors étudié indépendamment du Pb 3.

Au chapitre II, nous étudions le Pb 1 d'une façon intrinsèque pour des fonctions J qui n'entrent pas dans le cadre du chapitre I et pour lesquelles on ne peut garantir l'existence d'un point de selle. Là aussi, l'aspect constructif est essentiel.

Au chapitre III, nous appliquons les résultats du chapitre I à certains problèmes de contrôle optimal, avec deux contrôles antagonistes (jeux différentiels), de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques.

Le chapitre IV utilise les résultats du chapitre II pour l'étude de problèmes de contrôle optimal de systèmes dont le critère est le maximum de déviation sur l'intervalle de temps de l'état par rapport à l'état désiré ou de systèmes perturbés. Dans les deux cas il s'agit de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles paraboliques.

Enfin, le chapitre V présente quelques exemples numériques relatifs aux chapitres III et IV.

Chaque chapitre commence par une introduction détaillée. Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie.

Chapitre I

POINTS DE SELLE DE FONCTIONNELLES ET INEQUATIONS VARIATIONNELLES COUPLEES

L'objet de ce chapitre est l'étude du Pb 3 de l'introduction générale. Nous considérons d'abord le cas où K_1 et K_2 sont des sous-ensembles convexes fermés d'espaces de Hilbert et où J est une fonctionnelle de type quadratique (n°1), puis le cas où K_1 et K_2 sont des convexes fermés d'espaces de Banach et où J est une fonctionnelle convexe-concave (n°4). Nous montrons que sous des hypothèses de différentiabilité sur J, Pb 3 équivaut à un système de deux inéquations variationnelles couplées. Le n°2 traite ces inéquations indépendamment de tout problème d'optimisation, dans le cas linéaire. Nous donnons des exemples qui mettent en jeu des opérateurs différentiels aux dérivées partielles linéaires (n°3) ou non (n°5). Aux n°6 et n°7 nous présentons quelques méthodes constructives. Au n°8 nous traitons l'approximation de Pb 3 par un problème analogue en dimension finie.

§ 1 - Points de selle de fonctionnelles de type quadratique.

1.1 Notations.

Soient U_1 et U_2 deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de normes notées indifféremment $\|.\|$.

On se donne :

trois formes bilinéaires continues,

(i) $\begin{cases} a_i(u_i, v_i) \text{ sur } U_i, \text{ symétrique, } a_i(v_i, v_i) \geq \alpha_i \|v_i\|^2, \ \alpha_i \geq o, \ i = 1, 2, \\ b(v_2, v_1) \text{ sur } U_2 \times U_1 \ ; \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \text{deux formes linéaires continues sur } U_i, \\ v_i \to L_i(v_i), \ i = 1, 2 \ ; \end{cases}$

(iii) deux ensembles K_i convexes fermés dans U_i, $i = 1, 2$.

On considère la fonctionnelle (dite de type quadratique) sur $U = U_1 \times U_2$:

$$(1.1) \quad J(v_1, v_2) = a_1(v_1, v_1) - a_2(v_2, v_2) + 2 \{b(v_2, v_1) - L_1(v_1) + L_2(v_2)\},$$

dont on cherche les points de selle sur $K_1 \times K_2$, i.e. les couples

$$u = (u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$$

tels que

(1.2) $\quad J(u_1, v_2) \leq J(u_1, u_2) \leq J(v_1, u_2), \ \forall v_i \in K_i, \ i = 1, 2.$

On désignera par X le sous-ensemble de U des points de selle de J sur $K_1 \times K_2$.

1.2 Caractérisation d'un point de selle.

THEOREME 1.2. - Pour que $u \in X$, il faut et il suffit que

(1.3) $\quad a_1(u_1, v_1 - u_1) + b(u_2, v_1 - u_1) \geq L_1(v_1 - u_1), \quad \forall v_1 \in K_1,$

(1.4) $\quad -b^*(u_1, v_2 - u_2) + a_2(u_2, v_2 - u_2) \geq L_2(v_2 - u_2), \quad \forall v_2 \in K_2,$

où $b^*(v_1, v_2) \overset{\text{déf}}{=} b(v_2, v_1)$.

Démonstration. - On a

$$J(v_1, u_2) = a_1(v_1, v_1) - 2\{-b(u_2, v_1) + L_1(v_1)\} + 2L_2(u_2) - a_2(u_2, u_2)$$

$$= a_1(v_1, v_1) - 2\tilde{L}_1(v_1) + \gamma,$$

en posant

$$\tilde{L}_1(v_1) = - b(u_2, v_1) + L_1(v_1),$$

$$\gamma = 2L_2(u_2) - a_2(u_2, u_2).$$

Par conséquent (cf. [43]), pour que u_1 réalise le minimum de la forme quadratique $v_1 \to J(v_1, u_2)$ sur le convexe K_1, il faut et il suffit que

$$a_1(u_1, v_1 - u_1) \geq \tilde{L}_1(v_1 - u_1), \quad \forall v_1 \in K_1,$$

ce qui n'est autre que (1.3). Démonstration analogue pour (1.4), en considérant que u_2 réalise le minimum de la forme quadratique $v_2 \to -J(u_1, v_2)$ sur le convexe K_2.

THEOREME 1.3. - La caractérisation (1.3) - (1.4) équivaut à

(1.5) $\quad a_1(v_1, v_1 - u_1) + b(v_2, v_1 - u_1) \geq L_1(v_1 - u_1), \qquad \forall v_i \in K_i,$

(1.6) $\quad -b^*(v_1, v_2 - u_2) + a_2(v_2, v_2 - u_2) \geq L_2(v_2 - u_2), \qquad i = 1, 2.$

Démonstration. - On considère la forme bilinéaire continue sur $U = U_1 \times U_2$ qui, muni de la norme produit $\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$, est un Hilbert,

(1.7) $\quad a(u ; v) = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) + b(u_2, v_1) - b(v_2, u_1).$

Remarquons que $a(u\ ;\ v)$ n'est pas, en général, symétrique. On pose

$$L = (L_1,\ L_2) \qquad (L(v) = L_1(v_1) + L_2(v_2)).$$

Alors $L \in U'$. Posons enfin $K = K_1 \times K_2$. C'est un convexe fermé de U. Il est facile de vérifier que (1.3) - (1.4) équivaut alors à

$$(1.8) \qquad a(u\ ;\ v - u) \geq L(v - u), \qquad \forall\ v \in K.$$

Or ([43]), (1.8) équivaut à

$$(1.9) \qquad a(v\ ;\ v - u) \geq L(v - u), \qquad \forall\ v \in K.$$

(1.9) équivaut (vérification facile) à (1.5) - (1.6).

§ 2. Inéquations variationnelles couplées linéaires.

2.1. Position du problème. - On considère a priori le problème suivant :

Soient $\pi_i(u_i,\ v_i)$ deux formes bilinéaires continues non nécessairement symétriques données sur U_i, $i = 1, 2$, et $b(v_2,\ v_1)$, $c(v_1,\ v_2)$, deux formes bilinéaires continues données respectivement sur $U_2 \times U_1$ et $U_1 \times U_2$; on cherche $u_i \in K_i$, $i = 1, 2$, vérifiant

$$(2.1) \qquad \pi_1(u_1,\ v_1 - u_1) + b(u_2,\ v_1 - u_1) \geq L_1(v_1 - u_1), \qquad \forall\ v_1 \in K_1,$$

$$(2.2) \qquad c(u_1,\ v_2 - u_2) + \pi_2(u_2,\ v_2 - u_2) \geq L_2(v_2 - u_2), \qquad \forall\ v_2 \in K_2,$$

où L_i sont des formes linéaires continues données sur U_i, $i = 1, 2$. On suppose que les formes π_i vérifient

$$(2.3) \qquad \pi_i(v_i,\ v_i) \geq \beta_i \|v_i\|^2, \qquad \beta_i \geq 0, \quad \forall\ v_i \in U_i,\ i = 1, 2,$$

et que

$$(2.4) \qquad b(v_2,\ v_1) + c(v_1,\ v_2) \geq 0, \qquad \forall\ v_i \in U_i, \qquad i = 1, 2.$$

De la sorte, la forme bilinéaire continue sur U, $\pi(u\ ;\ v)$, définie d'une façon analogue à (1.7), vérifie

$$(2.5) \qquad \pi(v\ ;\ v) \geq \beta_1 \|v_1\|^2 + \beta_2 \|v_2\|^2 \geq \beta \|v\|^2, \qquad \forall\ v \in U,$$

avec

$$(2.6) \qquad \beta = \inf(\beta_1,\ \beta_2) \geq 0.$$

2.2. Convexité de l'ensemble des solutions.- Soit $X \subset K_1 \times K_2$ l'ensemble des solutions de (2.1)-(2.2).

THEOREME 2.1. - Si $X \neq \emptyset$, alors X est un convexe fermé de U. Plus précisément, $X = X_1 \times X_2$ où X_i est fermé convexe dans U_i, $i = 1, 2$.

Démonstration. - On remarque d'abord que (2.1)-(2.2) équivaut à

(2.7) $\quad \pi(u\ ;\ v - u) \geq L(v - u), \qquad \forall\, v \in K, \qquad u \in K,$

où L est défini comme dans le théorème 1.3. X est donc l'ensemble des solutions de (2.7), et par conséquent ([43]), s'il est non vide, il est fermé convexe dans U. Mais (2.7) équivaut à

(2.8) $\quad \pi(v\ ;\ v - u) \geq L(v - u), \qquad \forall\, v \in K, \qquad u \in K,$

[illegible]

(2.9) $\quad \pi(v_1, v_2 - u_1) + c(v_1, v_2 - u_1) \geq L_1(v_1 - u_1), \ \forall\, v_i \in K_i,\ i = 1, 2,$

(2.10) $\quad c(v_1, v_2 - u_2) + \pi_2(v_2, v_2 - u_2) \geq L_2(v_2 - u_2).$

En posant

$$u' = (u_1', u_2') \in X,$$
$$u'' = (u_1'', u_2'') \in X,$$

$u = \{\theta_1 u_1' + (1 - \theta_1)u_1'', \theta_2 u_2' + (1 - \theta_2)u_2''\}, \quad \theta_i \in [0, 1],\ i = 1, 2,$ on vérifie facilement que u satisfait (2.9)-(2.10). Par conséquent, X contient le rectangle $[u_1', u_1''] \times [u_2' \times u_2'']$, et est donc de la forme $X_1 \times X_2$, où X_i est convexe dans U_i, $i = 1, 2$.

2.3. Résultats sur l'existence et l'unicité.

THEOREME 2.2 (Unicité). - Si $\beta_i > 0$ ($i = 1$ ou 2), alors X_i est réduit à un élément.

Démonstration. - Soient $u', u'' \in X$ (supposé non vide). D'après (2.7), il vient

(2.11) $\quad \pi(u'\ ;\ v - u') \geq L(v - u'), \qquad \forall\, v \in K,$

(2.12) $\quad \pi(u''\ ;\ v - u'') \geq L(v - u''), \qquad \forall\, v \in K.$

Faisons $v = u''$ dans (2.11), et $v = u'$ dans (2.12), et additionnons. On a $-\pi(u' - u''\ ;\ u' - u'') \geq 0$; ce qui, joint à (2.5), donne

$$0 \geq \pi(u' - u''\ ;\ u' - u'') \geq \sum_{i=1}^{2} \beta_i \|u_i' - u_i''\|^2 ,$$

ce qui implique $\beta_i \|u_i' - u_i''\|^2 = 0$, donc $u_i' = u_i''$ si $\beta_i > 0$.

THEOREME 2.3 (Existence). - Sous l'une des hypothèses supplémentaires suivantes X est non vide :

(i) $\beta_i > 0$, $i = 1$ et 2 ;

(ii) $\beta_i = 0$ et K_i borné, $i = 1$ et 2 ;

(iii) $\beta_i > 0$ et K_{3-i} borné et $\beta_{3-i} = 0$, $i = 1$ ou 2.

Démonstration.

(i) $\beta = \inf(\beta_1, \beta_2) > 0$. On est dans le cas coercif pour le problème (2.7). D'où le résultat, d'après [43].

(ii) $\pi(u ; v)$ est seulement positive. Mais $K = K_1 \times K_2$ est borné. D'où le résultat, d'après [43].

(iii) Faisons la démonstration pour $i = 1$. (2.5) s'écrit

$$\pi(v ; v) \geq \beta_1 \|v_1\|^2 , \qquad \forall\, v \in U.$$

Posons

$$\pi_\varepsilon(u ; v) = \pi(u ; v) + \varepsilon((u_2, v_2)), \qquad \varepsilon > 0.$$

π_ε est une forme bilinéaire continue sur U, et vérifie

$$\pi_\varepsilon(u ; v) \geq \alpha_\varepsilon \|v\|^2 , \quad \alpha_\varepsilon = \inf(\beta_1, \varepsilon) > 0.$$

Par conséquent, il existe un unique $u_\varepsilon = \{u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}\} \in K$ tel que

$$\pi_\varepsilon(u_\varepsilon ; v - u_\varepsilon) \geq L(v - u_\varepsilon), \qquad \forall\, v \in K. \tag{2.13}$$

$u_{\varepsilon 2}$ est borné (quand $\varepsilon \to 0$), puisque $u_{\varepsilon 2} \in K_2$ qui est borné ; $u_{\varepsilon 1}$ est borné, car (2.13) implique

$$\beta_1 \|u_{\varepsilon 1}\|^2 \leq \pi_\varepsilon(u_\varepsilon ; u_\varepsilon) \leq \pi(u_\varepsilon ; v) + \varepsilon((u_{\varepsilon 2}, v_2)) + L(u_\varepsilon - v)$$
$$\leq c_1 \|u_{\varepsilon 1}\| + c_2 ,$$

avec c_1, c_2 constantes positives. On en déduit alors, comme dans [43], que u_ε tend fortement vers $u \in X$ de norme minimum, c'est-à-dire, d'après les théorèmes 2.1 et 2.2, $u = (u_1, u_2)$ avec u_1 = l'unique élément de X_1, et u_2 = l'élément de norme minimum dans X_2.

Remarque 2.1. - Les résultats de ce paragraphe sont bien sûr valables dans le cadre du paragraphe 1.

Remarque 2.2.

(i) Si $K_1 = U_1$ alors (2.1) équivaut à

$$\pi_1 u_1 + B\, u_2 = L_1$$

où $\pi_1 \in \mathcal{L}(U_1, U_1')$, $B \in \mathcal{L}(U_2, U_1')$ sont les opérateurs définis par les formes π_1 et b.

(ii) Si K_1 est un cône convexe de sommet l'origine, alors (2.1) équivaut à

$$\pi_1(u_1, v_1) + b(u_2, v_1) \geq L_1(v_1) \qquad \forall\, v_1 \in K_1$$

et

$$\pi_1(u_1, u_1) + b(u_2, u_1) = L_1(u_1)$$

On a, bien sûr, les deux remarques analogues pour K_2.

3. Exemples.

Exemple 3.1.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière. Posons $U_1 = U_2 = H^1(\Omega)$, et

$$a_i(u_i, v_i) = \alpha_i \int_\Omega (u_i v_i + \text{grad } u_i . \text{grad } v_i) dx , \qquad i = 1, 2$$

$$b(v_2, v_1) = - \int_\Omega (v_2 v_1 + \lambda \text{ grad } v_2 . \text{grad } v_1) dx$$

$$L_i(v_i) = \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_\Gamma g_i v_i \, d\Gamma \quad , \quad i = 1, 2$$

$\alpha_i > o$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_i \in L^2(\Omega)$ et $g_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Posons $K_1 = K_2 = K = \{v | v \in H^1(\Omega)$, trace de v sur $\Gamma \geq o$ presque partout$\}$, convexe fermé de $H^1(\Omega)$ ([43]). La fonctionnelle $J(v_1, v_2)$ définie comme en (1.1) admet un point de selle unique. Les méthodes d'interprétation utilisées dans [43] chapitre 1 appliquées aux inégalités variationnelles (1.5) et (1.6), montrent que le point de selle de J est l'unique solution du problème unilatéral coupl

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1(- \Delta u_1 + u_1) + \lambda \Delta u_2 - u_2 = f_1 \\ - \lambda \Delta u_1 + u_1 + \alpha_2(- \Delta u_2 + u_2) = f_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\left.\begin{aligned} & u_i \geq o \\ & \epsilon_i \lambda \frac{\partial u_{3-i}}{\partial n} + \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - g_i \geq o \\ & u_i(\epsilon_i \lambda \frac{\partial u_{3-i}}{\partial n} + \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - g_i = o \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & \text{sur } \Gamma \quad i = 1, 2 \\ & \epsilon_1 = - 1, \ \epsilon_2 = 1 \end{aligned}$$

Exemple 3.2.

Reprenons, avec les mêmes notations, le point 2.2 de [43], chapitre 2 : contrôle de problèmes variationnels elliptiques, le cas sans contrainte. Le contrôle optimal (unique) est donné par la règle suivante :

(i) On résout le problème suivant qui admet une solution unique :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} C^* \Lambda Cy - A^* p = C^* \Lambda z_d, \\ Ay + BN^{-1} \Lambda_u^{-1} B^* p = f \end{cases}$$

(ii) le contrôle optimal est donné par

$$(3.2) \qquad u = - N^{-1} \Lambda_u B^* p$$

(3.1) est un système linéaire en $\{y, p\}$, où la matrice d'opérateurs n'est pas symétrique. Par conséquent, (3.1) ne correspond pas à un problème de minimisation. Cependant, on va voir que la solution de (3.1) est point de selle d'une certaine fonctionnelle.

En effet, considérons la fonctionnelle sur $V \times V$:

$$(3.3) \quad J(y, p) = (C^* \Lambda C\, y, y) - (B\, N^{-1} \Lambda_u^{-1} B^*\, p, p) - 2\{(Ay, p) + (C^* \Lambda z_d, y) + (f, p)\}$$

où $(.,.)$ désigne la dualité entre V' et V. $C^* \Lambda C$ et $B\, N^{-1} \Lambda_u^{-1} B^*$ sont des opérateurs symétriques et on a

$$(C^* \Lambda C\, y, y) = |C\, y|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0 ,$$

$$(B\, N^{-1} \Lambda_u^{-1} B^*\, p, p) = (N^{-1} \Lambda_u^{-1} B^*\, p, \Lambda_u^{-1} B^*\, p)_u \geq \nu |\Lambda_u^{-1} B^*\, p|_u^2 \geq 0$$

La fonctionnelle (3.3) est donc, aux notations près, du type (1.1) et d'après la remarque 2.2(i), (3.1) est une condition nécessaire et suffisante pour que $\{y, p\}$ soit un point de selle de (3.3) sur $V \times V$. De plus, on a là un exemple de fonctionnelle de type quadratique dont les parties du second ordre ne sont pas coercives sur V, et qui cependant admet un point de selle <u>unique</u>.

Nous montrons dans [39] comment le cas avec contraintes peut aussi se ramener à la recherche du point de selle d'une fonction de (y, u) sur $V \times U_{ad}$.

<u>Remarque</u> 3.1. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et si $\lambda = 0$, on retrouve l'exemple de problème unilatéral (cas de systèmes) donné dans [43](§ 3.8, p.30) sans liaison avec un problème d'optimisation. La solution de cet exemple apparaît en fait ici comme l'unique point de selle de la fonctionnelle

$$J(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right|^2 - \left|\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\right|^2\right) dx + \int_\Omega (|v_1|^2 - |v_2|^2)\, dx - 2\{\int_\Omega v_2 v_1\, dx$$

$$+ \int_\Omega f_1\, v_1\, dx + \int_\Gamma g_1\, v_1\, d\Gamma - \int_\Omega f_2\, v_2\, dx - \int_\Gamma g_2\, v_2\, d\Gamma\}$$

sur $K \times K$.

§ 4. <u>Points de selle de fonctionnelles convexes-concaves</u>.

4.1. <u>Notations et théorème min-max</u>.

(4.1) K_i est un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach réflexif réel V_i, de norme $\|.\|_i$, $i = 1, 2$;

(4.2) $\forall\, v_2 \in K_2$, la fonction $v_1 \to J(v_1, v_2)$ est strictement convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i.) et

$$\lim_{\substack{\|v_1\|_1 \to \infty \\ v_1 \in K_1}} J(v_1, v_2) = +\infty ,$$

ou bien K_1 est borné ;

(4.3) $\forall\, v_1 \in K_1$, la fonction $v_2 \to J(v_1, v_2)$ est strictement concave et semi-continue supérieurement (s.c.s.) et

$$\lim_{\substack{\|v_2\|_2 \to \infty \\ v_2 \in K_2}} J(v_1, v_2) = -\infty$$

ou bien K_2 est borné.

<u>Théorème</u> 4.1. Sous les hypothèses (4.1), (4.2), (4.3), il existe un unique point de selle de J sur $K_1 \times K_2$.

<u>Démonstration</u>.

1° (a) $\sup J(v_1, v_2) = \max J(v_1, v_2)$, $\forall\, v_1 \in K_1$ et il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$ tel que

$$J(u_1, u_2) = \sup J(u_1, v_2) = \inf \sup J(v_1, v_2).$$

(b) $\inf J(v_1, v_2) = \min J(v_1, v_2)$, $\forall\, v_2 \in K_2$ et il existe un unique couple $(u_1', u_2') \in K_1 \times K_2$ tel que

$$J(u_1', u_2') = \inf J(v_1, u_2') = \sup \inf J(v_1, v_2).$$

En effet, posons $\psi(v_1) = \sup J(v_1, v_2)$. (4.1)-(4.3) implique, d'après un résultat classique sur la minimisation d'une fonctionnelle convexe ([43], remarque 1.2, p.6) que pour tout $v_1 \in K_1$ il existe $v_2(v_1) \in K_2$ unique tel que

(4.4) $$\psi(v_1) = \max J(v_1, v_2) = J(v_1, v_2(v_1)).$$

ψ est convexe s.c.i comme enveloppe supérieure de fonctions convexes s.c.i et est même strictement convexe car, pour tout $u_1 \neq v_1 \in K_1$ et $\theta \in]0, 1[$, il existe $\bar{v}_2 \in K_2$ tel que

$$\psi(\theta u_1 + (1-\theta)v_1) = J(\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \bar{v}_2) < \theta\, J(u_1, \bar{v}_2) + (1-\theta)J(v_1, \bar{v}_2)$$

$$\leq \theta\, \psi(u_1) + (1-\theta)\psi(v_1).$$

De plus, $\psi(v_1) \geq J(v_1, v_2)$, $\forall\, v_2 \in K_2$ et donc, d'après (4.2),

$$\lim_{\|v_1\| \to \infty} \psi(v_1) = +\infty.$$

Il existe alors, d'après le même résultat rappelé ci-dessus, $u_1 \in K_1$ unique tel que $\psi(u_1) = \inf \psi(v_1)$, ce qui démontre (a) avec $u_2 = v_2(u_1)$.

On démontrerait de même (b).

2° Pour chaque $v_2 \in K_2$, soit $v_1(v_2) \in K_1$ tel que

(4.5) $$J(v_1(v_2), v_2) = \min J(v_1, v_2) \overset{\text{def}}{=} \varphi(v_2) \;;$$

$v_1(v_2)$ existe et est déterminé univoquement d'après le 1º Soit $u_2 \in K_2$ tel que $\varphi(u_2) = \max \varphi(v_2) = \max \min J(v_1, v_2)$; u_2 existe et est unique d'après le 1°. Soit $\{t_n\}$ une suite de nombres réels $(0 < t_n \leq 1)$ tels que $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ et soit $v_2 \in K_2$. Posons

$$v_2^n = (1 - t_n)u_2 + t_n\, v_2.$$

Alors $v_2^n \in K_2$ et $v_2^n \to u_2$ quand $n \to \infty$. Comme J est concave en v_2, on a

$$J(v_1, v_2^n) \geq (1 - t_n)J(v_1, u_2) + t_n\, J(v_1, v_2) \qquad \forall\, v_1 \in K_1$$

d'où $$J(v_1, v_2^n) \geq (1 - t_n)\, \varphi(u_2) + t_n\, J(v_1, v_2) \qquad \forall\, v_1 \in K_1$$

Faisons $v_1 = v_1^n = v_1(v_2^n)$. Il vient

$$\varphi(v_2^n) \geq (1 - t_n)\, \varphi(u_2) + t_n\, J(v_1^n, v_2)$$

Et comme $\varphi(u_2) \geq \varphi(v_2^n)$ on a finalement

(4.6) $$J(v_1^n, v_2) \leq \varphi(u_2)$$

Utilisant encore la concavité de J en v_2 et la définition de φ et celle de l'application $v_2 \to v_1(v_2)$, on a

$$(1 - t_n)\varphi(u_2) + t_n\, \varphi(v_2) \leq (1 - t_n)J(v_1^n, u_2) + t_n\, \varphi(v_2) \leq \ldots$$
$$\ldots \leq (1 - t_n)J(v_1^n, u_2) + t_n\, J(v_1^n, v_2) \leq J(v_1^n, v_2^n) \leq J(u_1, v_2^n)$$

où $u_1 = v_1(u_2)$.

La semi-continuité supérieure de J par rapport à v_2 implique

$$\limsup_{n \to \infty} J(u_1, v_2^n) \leq J(u_1, u_2) = \varphi(u_2)$$

Donc

$$\limsup_{n \to \infty} \{(1 - t_n)J(v_1^n, u_2) + t_n\, \varphi(v_2)\} = \varphi(u_2)$$

Comme $t_n \varphi(v_2)$ tend vers 0, on a

(4.7) $$\limsup_{n \to \infty} (1 - t_n) J(v_1^n, u_2) = \varphi(u_2)$$

Or $J(v_1^n, v_2)$ est borné. En effet, d'une part

(4.8) $$\varphi(u_2) \leq J(v_1^n, u_2), \text{ par définition de } \varphi,$$

d'autre part $J(v_1^n, u_2)$ est majoré, sinon on pourrait extraire une sous-suite $J(v_1^\nu, u_2)$ tendant vers $+\infty$. On aurait alors

$$\lim_{\nu \to \infty} (1 - t_\nu) J(v_1^\nu, u_2) = +\infty,$$

ce qui est en contradiction avec (4.7). Finalement, (4.7) implique

(4.9) $$\limsup_{n \to \infty} J(v_1^n, u_2) = \varphi(u_2)$$

D'autre part, (4.8) implique

(4.10) $$\varphi(u_2) \leq \liminf_{n \to \infty} J(v_1^n, u_2)$$

Enfin, (4.9) et (4.10) implique

$$\lim_{n \to \infty} J(v_1^n, u_2) = \varphi(u_2).$$

Ce qui prouve que v_1^n est une suite minimisante de la fonction strictement convexe s.c.i $v_1 \to J(v_1, u_2)$ sur le convexe fermé K_1. On en déduit par un raisonnement classique ([43]) : v_1^n tend faiblement vers u_1. Remarquons que cette limite est indépendante de v_2 choisi arbitrairement dans K_2.

(4.6) et la semi-continuité inférieure en v_1 implique

(4.11) $$J(u_1, v_2) \leq \liminf_{n \to \infty} J(v_1^n, v_2) \leq \varphi(u_2),$$

et d'après la définition de $\varphi(u_2)$ on a

$$\varphi(u_2) \leq J(v_1, u_2), \qquad \forall\, v_1 \in K_1,$$

ce qui joint à (4.11), montre que (u_1, u_2) est un point de selle de J sur $K_1 \times K_2$.

3° <u>unicité</u>

D'après le 1°, il existe $u_1 \in K_1$ unique et $u_2 \in K_2$ unique tels que

(4.12) $$\sup J(u_1, v_2) = \inf \sup J(v_1, v_2)$$

(4.13) $$\inf J(v_1, u_2) = \sup \inf J(v_1, v_2)$$

Or (cf. introduction générale) tout point de selle (u_1, u_2) de J sur $K_1 \times K_2$ est tel que u_1 (resp. u_2) vérifie (4.12)(resp.(4.13)).

Donc le point de selle dont on a démontré l'existence en 2° est unique.

Corollaire 4.1.

Si V_1 et V_2 sont des espaces strictement convexes, alors, sous les hypothèses du théorème 4.1 où "strictement convexe" (resp. "strictement concave") est remplacé par "convexe" (resp. "concave"), J admet un point de selle sur $K_1 \times K_2$ (non nécessairement unique).

Démonstration. Soit $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ un couple de nombres positifs destinés à tendre vers 0. Posons

$$J_\varepsilon(v_1, v_2) = J(v_1, v_2) + \varepsilon_1\|v_1\|_1^2 - \varepsilon_2\|v_2\|_2^2$$

Le carré de la norme d'un Banach strictement convexe étant une fonction strictement convexe, J_ε vérifie les hypothèses du théorème 4.1.
Il existe donc un unique point de selle $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ de J_ε, i.e :

$$(4.14) \qquad J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, v_2) \leq J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \leq J_\varepsilon(v_1, u_{2\varepsilon}), \ \forall v_1 \in K_1, \quad \forall v_2 \in K_2$$

D'où

$$(4.15) \qquad J(u_{1\varepsilon}, v_2) - \varepsilon_2\|v_2\|_2^2 \leq J(v_1, u_{2\varepsilon}) + \varepsilon_1\|v_1\|_1^2 \qquad \forall\, v_1 \in K_1, \ \forall\, v_2 \in K_2$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\{u_{1\varepsilon}\}$ et $\{u_{2\varepsilon}\}$ sont bornées. En effet, si ni l'une ni l'autre était bornée l'expression de gauche (resp. celle de droite) dans (4.15) tendrait vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$). Si $\{u_{1\varepsilon}\}$ n'était pas bornée et si $\{u_{2\varepsilon}\}$ était bornée, alors, après extraction éventuelle, $\|u_{1\varepsilon}\|_1 \to +\infty$ et l'expression de gauche dans (4.13) tendrait vers $+\infty$, tandis que celle de droite serait majorée car $J(v_1, u_{2\varepsilon})$ est s.c.s. faible en $u_{2\varepsilon}$ (puisque concave et s.c.s). D'une façon analogue, on aboutirait encore à une contradiction si $\{u_{1\varepsilon}\}$ était bornée et $\{u_{2\varepsilon}\}$ non bornée.

Utilisant alors la compacité faible des ensembles bornés dans un Banach réflexif, on obtient, après extractions éventuelles, $u_{1\varepsilon}$ (resp. $u_{2\varepsilon}$) tend vers $\bar{u}_1$ dans V_1 (resp. vers $\bar{u}_2$ dans V_2) faible. Comme dans un espace normé tout convexe fermé est faiblement fermé, $\bar{u}_1 \in K_1$ et $\bar{u}_2 \in K_2$.
Enfin, les semi-continuités permettent de passer à la limite dans (4.14) et de montrer que $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ est un point de selle de J sur $K_1 \times K_2$ et que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon \to 0} J(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = J(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

Remarque 4.1 Le théorème 4.1 et son corollaire répondent en fait à la question de l'existence et de l'unicité pour le problème suivant :

trouver $u_1 \in K_1$ et $u_2 \in K_2$ tels que

$$\inf \sup J(v_1, v_2) = \sup \inf J(v_1, v_2) = J(u_1, u_2)$$

Ce problème n'est pas, en général, équivalent à la recherche des points de selle de J, sauf s'il admet une solution unique (cas du théorème 4.1 par exemple). En effet, il peut y avoir des solutions qui ne sont pas points de selle, même dans le cas d'unicité de celui-ci.

Exemple : $V_1 = V_2 = K_1 = K_2 = \mathbb{R}$, $J(v_1, v_2) = v_1 v_2$ admet l'unique point de selle $(0, 0)$ et $\forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$J(v_1, 0) = J(0, v_2) = \inf \sup J(v_1, v_2) = \sup \inf J(v_1, v_2) = 0$$

Remarque 4.2. Le théorème 4.1 et son corollaire constituent une variante du théorème min-max démontré dans le cas d'espaces de dimension finie par Von NEUMANN ([65]), KAKUTANI ([32]),SCHIFFMAN ([57]), SION ([58]), ROCKAFELLAR ([55]), puis généralisé aux espaces vectoriels topologiques quelconques, notamment par KI-FAN ([23]), MOREAU ([46]) et NICOLAS ([48]). Ces démonstrations reposent également sur des hypothèses de convexité-concavité plus ou moins raffinées. La démonstration donnée ici est une généralisation de celle de SCHIFMANN, donnée par KARLIN dans ([33]). Il nous a semblé intéressant d'effectuer cette extension surtout à cause de la méthode de régularisation du corollaire 4.1. A ce sujet cf. également le corollaire 4.4 ci-dessous.

Corollaire 4.2 L'ensemble $X \subset K_1 \times K_2$ des points de selle de J est de la forme $X = X_1 \times X_2$ où X_1(resp. X_2) est un convexe fermé de K_1 (resp. de K_2)

Démonstration.

X est fermé (cela résulte des hypothèses de semi-continuité), et si $(u_1, u_2) \in X$ et $(u_1', u_2') \in X$, alors le "rectangle" $[u_1, u_1'] \times [u_2, u_2']$ est contenu dans X car

$$J(\lambda_1 u_1 + (1 - \lambda_1)u_1', v_2) \leq \lambda_1 J(u_1, v_2) + (1 - \lambda_1)J(u_1', v_2) \leq \delta, \ \forall v_2 \in K_2, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1,$$

$$J(v_1, \lambda_2 u_2 + (1 - \lambda_2)u_2') \geq \lambda_2 J(v_1, u_2) + (1 - \lambda_2)J(v_1, u_2') \geq \delta, \ \forall v_1 \in K_1, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1,$$

où $\delta = J(u_1, u_2) = J(u_1', u_2')$.

Corollaire 4.3. Si $v_1 \to J(v_1, v_2)$ est strictement convexe (resp. $v_2 \to J(v_1, v_2)$ est strictement concave) alors X_1 (resp. X_2) est réduit à un point.

Démonstration.

On a, d'après le corollaire 4.2, par exemple,

$$(u_1, u_2) \in X \quad \text{et} \quad (u_1', u_2') \in X \quad \text{implique} \quad (u_1, u_2') \in X.$$

u_1 et u_1' réalisent le minimum de la fonction strictement convexe $v_1 \to J(v_1, u_2')$. Donc $u_1 = u_1'$. De même $u_2 = u_2'$.

Corollaire 4.4

Dans le corollaire 4.1 on suppose que $\varepsilon \to 0$ avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Alors
(i) $\bar{u}_1$ (resp. $\bar{u}_2$) est l'élément de X_1 (resp. X_2) de norme minimum (unique puisque V_i est strictement convexe, $i = 1, 2$).

(ii) Si de plus $V_1 \times V_2$ muni de la norme produit est uniformément convexe (par exemple si V_1 et V_2 sont des Hilberts), alors $u_{1\varepsilon}$(resp. $u_{2\varepsilon}$) tend fortement vers $\bar{u}_1$ (resp. $\bar{u}_2$).

Démonstration.

(i) De (4.14) on déduit

$$\varepsilon_1\|u_{1\varepsilon}\|_1^2 + \varepsilon_2\|u_{2\varepsilon}\|_2^2 \le \varepsilon_1\|v_1\|_1^2 + \varepsilon_2\|v_2\|_2^2 + J(v_1, u_{2\varepsilon}) - J(u_{1\varepsilon}, v_2)$$

$$\forall\, v_1 \in K_1, \quad \forall\, v_2 \in K_2$$

Faisons $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2$ où $(u_1, u_2) \in X$. Alors

$$J(u_1, u_{2\varepsilon}) - J(u_{1\varepsilon}, u_2) \le 0$$

et comme $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$,

$$\|u_{1\varepsilon}\|_1^2 + \|u_{2\varepsilon}\|_2^2 \le \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_2^2 \ ;$$

comme l'application $(v_1, v_2) \to \|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2$ est s.c.i pour la topologie faible de $V_1 \times V_2$ (car convexe et continue), on déduit

$$(4.16) \quad \|\bar{u}_1\|_1^2 + \|\bar{u}_2\|_2^2 \le \liminf\, (\|u_{1\varepsilon}\|_1^2 + \|u_{2\varepsilon}\|_2^2) \le \limsup\, (\|u_{1\varepsilon}\|_1^2 + \|u_{2\varepsilon}\|_2^2)$$
$$\le \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_2^2$$

Donc, d'après le corollaire 4.2,

$$\|\bar{u}_1\|_1 \le \|u_1\|_1 \quad \forall\, u_1 \in X_1 \ , \ \|\bar{u}_2\|_2 \le \|u_2\|_2 \quad \forall\, u_2 \in X_2.$$

(ii) (4.16) étant vraie pour $u_1 = \bar{u}_1$ et $u_2 = \bar{u}_2$, on en déduit

$$\lim\, (\|u_{1\varepsilon}\|_1^2 + \|u_{2\varepsilon}\|_2^2) = \|\bar{u}_1\|_1^2 + \|\bar{u}_2\|_2^2$$

$u_\varepsilon = (u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ converge dans $V_1 \times V_2$ faible vers $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ et $\|u_\varepsilon\|$ tend vers $\|\bar{u}\|$. Donc $u_\varepsilon \to \bar{u}$ dans $V_1 \times V_2$ fort puisque $V_1 \times V_2$ est uniformément convexe.

4.2 Caractérisation d'un point de selle.

On suppose maintenant que J est définie sur $V_1 \times V_2$ et est convexe-concave, i.e

$$v_1 \to J(v_1, v_2) \quad \text{est convexe} \quad \forall\, v_2 \in V_2$$

$$v_2 \to J(v_1, v_2) \quad \text{est concave} \quad \forall\, v_1 \in V_1$$

Par conséquent, J admet des différentielles directionnelles partielles

$$J_1'(v_1, v_2 ; w_1) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{J(v_1 + \lambda w_1, v_2) - J(v_1, v_2)}{\lambda}$$

$$J_2'(v_1, v_2 ; w_2) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{J(v_1, v_2 + \lambda w_2) - J(v_1, v_2)}{\lambda}$$

Quels que soient $v_1, w_1 \in V_1$ et $v_2, w_2 \in V_2$ ([62]).

Théorème 4.2. Si K_i est un sous ensemble convexe de V_i, $i = 1, 2$ si J est convexe-concave sur $V_1 \times V_2$, une condition nécessaire et suffisante pour que $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$ soit un point de selle de J sur $K_1 \times K_2$ est

(4.17) $\quad J_1'(u_1, u_2 ; v_1 - u_1) \geq 0 \qquad \forall\, v_1 \in K_1 , \quad u_1 \in K_1 ,$

et

(4.18) $\quad J_2'(u_1, u_2 ; v_2 - u_2) \leq 0 \qquad \forall\, v_2 \in K_2 , \quad u_2 \in K_2.$

Démonstration.

(4.17) (resp. (4.18)) est nécessaire et suffisant pour que la fonction convexe $v_1 \to J(v_1, u_2)$ atteigne sa borne inférieure sur K_1 en u_1 (resp. la fonction concave $v_2 \to J(u_1, v_2)$ atteigne sa borne supérieure sur K_2 en u_2).

Remarque 4.3. (4.17) et (4.18) équivaut à

(4.10) $\quad J_1'(u_1, u_2 ; v_1 - u_1) - J_2'(u_1, u_2 ; v_2 - u_2) \geq 0 \qquad \forall (v_1, v_2) \in K_1 \times$

$(u_1, u_2) \in K_1 \times$

Corollaire 4.5

Si J admet des dérivées partielles de Gateaux

$J_i'(v_1, v_2) \in V_i' \qquad \forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 , \qquad i = 1, 2$

où V_i' désigne le dual topologique de V_i, alors (4.17) (4.18) devient

(4.20) $\quad < J_1'(u_1, u_2), v_1 - u_1 >_1 \geq 0 \ , \quad \forall\, v_1 \in K_1 \ , \ u_1 \in K_1$

(4.21) $\quad < J_2'(u_1, u_2), v_2 - u_2 >_2 \leq 0 \ , \quad \forall\, v_2 \in K_2 \ , \ u_2 \in K_2$

où $<.,.>_i$ désigne la dualité entre V_i' et V_i.

<u>démonstration</u>.

On a $\quad J_i'(u_1, u_2 \ ; w_i) = < J_i'(u_1, u_2), w_i >_i$.

<u>Remarque 4.4.</u>

Si V_1 et V_2 sont des espaces de Hilbert et si J est une fonctionnelle de type quadratique (cf. 1.1) alors elle est convexe-concave (strictement convexe-concave et vérifiant les conditions de convergence à l'infini de (4.2) et (4.3) si les formes a_i sont coercives). De plus J est dérivable et on a

(4.22) $$J_1'(v_1, v_2) = 2(A_1 v_1 + B v_2 - L_1)$$

(4.23) $$J_2'(v_1, v_2) = 2(B^* v_1 - A_2 v_2 + L_2)$$

où A_i, B, B^* désignent les opérateurs linéaires continus définis par les formes a_i, b, b^* (transposée de b). Par conséquent, les résultats de ce paragraphe contiennent ceux du n°2 dans le cas où les formes π_i sont <u>symétriques</u>.

§ 5. <u>Exemple non quadratique</u>.

5.1. Soit, pour $i = 1, 2$, K_i étant toujours un convexe fermé de V_i Banach réflexif réel, $v_i \to J_i(v_i)$ une fonctionnelle sur V_i vérifiant

(5.1) $\quad J_i$ est strictement convexe continue,

(5.2) $$\lim_{\substack{\|v_i\| \to \infty \\ v_i \in K_i}} \frac{J_i(v_i)}{\|v_i\|} = +\infty \ , \text{ hypothèse sans objet si } K_i \text{ est borné.}$$

Soit encore

(5.3) $\quad (v_1, v_2) \to b(v_2, v_1)$ une forme bilinéaire continue sur $V_2 \times V_1$,

(5.4) $\quad L_i \in V_i' \ , \quad i = 1, 2$.

On pose

(5.5) $$J(v_1, v_2) = J_1(v_1) - J_2(v_2) + b(v_2, v_1) - L_1(v_1) + L_2(v_2)$$

Proposition 5.1.

Le problème du point de selle pour la fonctionnelle (5.5) admet, sous les hypothèses (5.1) à (5.4) une solution unique.

démonstration.

J est évidemment strictement convexe-concave, s.c.i - s.c.s.

De plus, on a

$$(5.6) \qquad J(v_1, v_2) \geq \|v_1\|_1 \left(\frac{J_1(v_1)}{\|v_1\|_1} - (M\|v_2\|_2 + \|L_1\|_1^*)\, \|v_1\|_1\right) - J_2(v_2)$$

où, d'après (5.3), $M > 0$ est telle que $|b(v_2, v_1)| \leq M\|v_1\|_1 \, \|v_2\|_2$.

(5.6) entraîne donc, d'après (5.2),

$$\lim_{\substack{\|v_1\|_1 \to \infty \\ v_1 \in K_1}} J(v_1, v_2) = +\infty, \qquad \forall\, v_2 \in K_2.$$

On démontrerait de même

$$\lim_{\substack{\|v_2\|_2 \to \infty \\ v_2 \in K_2}} J(v_1, v_2) = -\infty, \quad \forall\, v_1 \in K_1$$

Le théorème 4.1 s'applique donc.

5.2 Supposons maintenant que J_i soit différentiable et soit $J_i'(v_i)$ sa dérivée de Gateaux. Alors J définie par (5.5) admet des dérivées partielles de Gateaux

$$(5.7) \qquad J_1'(v_1, v_2) = J_1'(v_1) + B\, v_2 - L_1$$

$$(5.8) \qquad J_2'(v_1, v_2) = B^*\, v_1 - J_2'(v_2) + L_2$$

où $B \in \mathcal{L}(V_2, V_1')$ est défini par $< Bv_2, v_1 >_1 = b(v_2, v_1)$ et où B^* = transposée de B. , $B^* \in \mathcal{L}(V_1, V_2')$.

D'après le corollaire 4.5, le point de selle (u_1, u_2) de J sur $K_1 \times K_2$ (cf. proposition 5.1) est caractérisé par

$$(5.9) \qquad < J_1'(u_1) + B\, u_2 - L_1, v_1 - u_1 >_1 \geq 0 \qquad \forall\, v_1 \in K_1,\ u_1 \in K_1$$

$$(5.10) \qquad < B^*\, u_1 - J_2'(u_2) + L_2, v_2 - u_2 >_2 \leq 0 \qquad \forall\, v_2 \in K_2,\ u_2 \in K_2$$

Remarque 5.1.

Les fonctionnelles de type quadratique (1.1) entrent dans la classe des fonctionnelles (5.5).

Exemple 5.1.

Soit Ω un ouvert borné $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ.
Soient $p_1 \geq 2$ et $p_2 \geq 2$. Posons

$$v_1 = L^{p_1}(\Omega) \cap H_o^1(\Omega) \qquad , \qquad v_2 = W_o^{1,p_2}(\Omega) .$$

Muni de la norme $\|v_1\|_1 = \|v_1\|_{L^{p_1}} + \|v_1\|_{H_o^1}$, où

$$(5.11) \qquad \|w\|_{H_o^1} = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i w\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad D_i w = \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad ,$$

V_1 est un Banach réflexif et $V_1 \subset L^{p_1}(\Omega)$, $V_1 \subset H_o^1(\Omega)$ avec injections continues. De même, V_2 muni de la norme

$$\|v_2\|_2 = \|v_2\|_{W_o^{1,p_2}} = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i v_2\|_{L^{p_2}}^{p_2}\right)^{1/p_2}$$

est un Banach réflexif et, comme $L^{p_2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (parce que Ω est borné et $p_2 \geq 2$), $V_2 \subset H_o^1(\Omega)$ avec injection continue pour la norme (5.11).

Posons

$$J_1(v_1) = \frac{1}{p_1} \|v_1\|_{L^{p_1}}^{p_1} \qquad\qquad J_2(v_2) = \frac{1}{p_2} \|v_2\|_{W_o^{1,p_2}}^{p_2}$$

$$b(v_2, v_1) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i v_1 \, D_i v_2 \, dx$$

Soit $f_i \in L^{p_i'}(\Omega)$, $\frac{1}{p_i'} + \frac{1}{p_i} = 1$, posons $L_i(v_i) = \int_\Omega f_i \, v_i \, dx$.

On pose alors

$$(5.12) \quad J(v_1, v_2) = \frac{1}{p_1} \|v_1\|_{L^{p_1}}^{p_1} - \frac{1}{p_2} \|v_2\|_{W_o^{1,p_2}}^{p_2} + \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i v_1 \, D_i v_2 \, dx$$
$$- \int_\Omega f_1 \, v_1 \, dx + \int_\Omega f_2 \, v_2 \, dx$$

Les hypothèses (5.1) à (5.4) sont bien vérifiées. En particulier, J_i est strictement convexe car $L^{p_1}(\Omega)$ et $W_o^{1,p_2}(\Omega)$ sont uniformément convexes et $p_i \geq 2$. De plus, J_i est différentiable et on montre ([59]) que

$$J_1'(v_1) = |v_1|^{p_1-2} v_1 \in L^{p_1'}(\Omega) \subset V_1'$$

$$J_2'(v_2) = -\sum_{i=1}^{n} D_i \, |D_i \, v_2|^{p_2-2} \, D_i \, v_2 \in W^{-1,p_2'} = V_2'$$

Le point de selle de (5.12) existe et est unique et est caractérisé par

$$(5.13) \quad \int_\Omega |u_1|^{p_1-2} u_1(v_1 - u_1)dx + b(u_2, v_1 - u_1) \geq \int_\Omega f_1(v_1 - u_1)dx \qquad \forall\, v_1 \in K_1,\ u_1 \in K_1$$

$$(5.14) \quad - b(v_2 - u_2, v_1) - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i |\, D_i \, u_2|^{p_2-2} \, D_i u_2(v_2 - u_2)dx \geq \int_\Omega f_2(v_2 - u_2)dx \quad \forall\, v_2 \in K_2,\ u_2 \in K_2$$

Si $K_i = V_i$, $i = 1, 2$, les inéquations variationnelles couplées (5.13)(5.14) se réduisent à des équations et s'interprètent comme suit

$$\left.\begin{aligned} &|u_1|^{p_1-2} u_1 - \Delta u_2 = f_1 \\ &\Delta u_1 + \sum_{i=1}^{n} D_i |D_i \, u_2|^{p_2-2} \, D_i \, u_2 = f_2 \end{aligned}\right\} \text{ au sens des distributions dans } \Omega$$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

§ 6. <u>Pénalisation</u>.

V_1 et V_2 sont des Banach réflexifs réels. Soit

$$(6.1) \qquad H_i = \{v_i | v_i \in V_i \ , \ g_i(v_i) = 0\}, \ i = 1,2$$

où g_i est une fonctionnelle convexe, s.c.i., ≥ 0. Alors H_i est un convexe fermé de V_i. On peut, se ramener à ce cas lorsque H_i est défini par un nombre fini d'inégalités $g_{ik}(v_i) \leq 0$ où les g_{ik} sont des fonctionnelles convexes s.c.i., en posant

$$g_i(v_i) = \sum_k \tilde{g}_{ik}(v_i) \text{ où } \tilde{g}_{ik}(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_{ik}(v_i) \leq 0 \\ g_{ik}(v_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{ou } g_i(v_i) = \sum_k \tilde{g}_{ik}(v_i)^2$$

Dans ce dernier cas g_i est différentiable si les g_{ik} le sont.

Considérons le problème Pb 3 de la recherche des points de selle de la fonctionnelle

$$(6.2) \qquad J_\varepsilon(v_1, v_2) = J(v_1, v_2) + \frac{1}{\varepsilon_1} g_1(v_1) - \frac{1}{\varepsilon_2} g_2(v_2)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, J est définie sur $K_1 \times K_2$ où K_i est un convexe fermé de V_i.

Théorème 6.1.

Sous les hypothèses du théorème 4.1, J_ε définie par (6.2) admet un unique point de selle sur $K_1 \times K_2$, $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in K_1 \times K_2$.

Lorsque $\varepsilon \to o$, $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ tend faiblement dans $V_1 \times V_2$ vers l'unique point de selle de J sur $(K_1 \cap H_1) \times (K_2 \cap H_2)$ (H_i défini par (6.1)), (u_1, u_2). De plus $\lim\limits_{\varepsilon \to o} J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = J(u_1, u_2)$.

Démonstration.

J_ε est strictement convexe-concave et s.c.i, s.c.s. et

$$(6.3) \qquad \lim_{\|v_1\|_1 \to \infty} J_\varepsilon(v_1, v_2) = +\infty , \quad \forall\, v_2 \in V_2$$

car $g_1(v_1)$ est minorée (par 0). De même,

$$(6.4) \qquad \lim_{\|v_2\|_2 \to \infty} J_\varepsilon(v_1, v_2) = -\infty , \quad \forall\, v_1 \in V_1 .$$

(6.3) (resp. 6.4) n'étant pas à vérifier si K_1(resp. K_2) est borné.
Le théorème 4.1 permet alors d'affirmer l'existence et l'unicité de $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$.
Donc

$$(6.5) \quad J(u_{1\varepsilon}, v_2) + \frac{1}{\varepsilon_1} g_1(u_{1\varepsilon}) - \frac{1}{\varepsilon_2} g_2(v_2) \le J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \le J(v_1, u_{2\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon_1} g_1(v_1) - \frac{1}{\varepsilon_2} g_2(u_{2\varepsilon}) \quad \forall (v_1, v_2) \in K_1 \times K_2 .$$

Comme $g_1(u_1) = g_2(u_2) = 0$, (6.3) implique

$$(6.6) \qquad J(u_{1\varepsilon}, u_2) \le J(u_1, u_{2\varepsilon})$$

D'où l'on déduit, comme dans la démonstration du corollaire 4.1 que $\{u_{1\varepsilon}\}$ et $\{u_{2\varepsilon}\}$ sont bornées. Après extractions éventuelles, on a donc $u_{i\varepsilon} \to \bar{u}_i$ dans V_i faible et $\bar{u}_i \in K_i$, $i = 1,2$.

Montrons que $\bar{u}_i \in H_i$; (6.5) implique

$$(6.7) \qquad J(u_{1\varepsilon}, u_2) + \frac{1}{\varepsilon_1} g_1(u_{1\varepsilon}) \le J(u_1, u_{2\varepsilon}) - \frac{1}{\varepsilon_2} g_2(u_{2\varepsilon}) ;$$

$u_{1\varepsilon}$ borné et J s.c.i par rapport à v_1 pour v_2 fixé, et
$u_{2\varepsilon}$ borné et J s.c.s. par rapport à v_2 pour v_1 fixé, et
(6.7) implique l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$(6.8) \quad C_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} g_1(u_{1\varepsilon}) \le C_2 - \frac{1}{\varepsilon_2} g_2(u_{2\varepsilon})$$

D'où l'on déduit $g_1(u_{1\varepsilon}) \to 0$ et $g_2(u_{2\varepsilon}) \to 0$.

g_i s.c.i et convexe implique

$$0 \le g_i(\bar{u}_i) \le \liminf g_i(u_{i\varepsilon}) = 0$$

Donc $g_i(\bar{u}_i) = 0$, i.e. $\bar{u}_i \in H_i$, $i = 1, 2$.

D'autre part (6.8) implique

$$(6.9) \qquad J(u_{1\varepsilon}, v_2) \le J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \le J(v_1, u_{2\varepsilon}) \qquad \forall\, v_i \in K_i \cap H_i\ ,\ i = 1, 2$$

Les semi-continuités permettent de passer à la limite dans (6.9) :

$$(6.10) \quad J(\bar{u}_1, v_2) \le \liminf J(u_{1\varepsilon}, v_2) \le \liminf J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \le$$
$$\le \limsup J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \le \limsup J(v_1, u_{2\varepsilon}) \le J(v_1, \bar{u}_2)$$

D'où l'on déduit immédiatement que $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ est point de selle de J sur $(K_1 \cap H_1) \times (K_2 \cap H_2)$ donc $\bar{u}_1 = u_1$ et $\bar{u}_2 = u_2$ à cause de l'unicité de (u_1, u_2) (cf. théorème 4.1) et que $\lim J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = J(u_1, u_2)$.

Corollaire 6.1.

Sous les hypothèses du théorème 6.1, si de plus, J admet des dérivées partielles de Gateaux par rapport à v_1 et à v_2 et si $v_1 \to J(v_1, v_2)$ est fortement convexe et $v_2 \to J(v_1, v_2)$ est fortement concave, alors $u_{i\varepsilon}$ converge fortement vers u_i, $i = 1, 2$.

Démonstration.

Les hypothèses supplémentaires assurent l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(6.11) \qquad J(u_{1\varepsilon}, u_2) \ge J(u_1, u_2) + \langle J_1'(u_1, u_2), u_{1\varepsilon} - u_1 \rangle_1 + C_1 \|u_{1\varepsilon} - u_1\|_1^2$$

De (6.6) on déduit

$$J(u_1, u_2) \le \liminf J(u_{1\varepsilon}, u_2) \le \limsup J(u_{1\varepsilon}, u_2) \le$$
$$\le \lim J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = J(u_1, u_2)$$

Donc $\lim J(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = J(u_1, u_2)$. La convergence forte de $u_{1\varepsilon}$ vers u_1 résulte alors immédiatement de (6.11) et de la convergence faible. Démonstration analogue pour la convergence forte de $u_{2\varepsilon}$ vers u_2.

Remarque 6.1.

Cette méthode de pénalisation a été proposée d'une façon indépendante par AUSLENDER ([3]) qui suppose K_1 et K_2 bornés. Ici, le théorème 4.1 permet

de prendre $K_i = V_i$ (à condition d'avoir les hypothèses de croissance à l'infini), c'est-à-dire de pénaliser toutes les contraintes.

§ 7 - Une méthode constructive pour la résolution des problèmes de point de selle ou des inéquations variationnelles couplées.

Jusqu'ici, nous avons vu comment par régularisation (corollaire 4.1) on peut se ramener à un point de selle unique et par pénalisation on peut se "débarasser" des contraintes. Mais les théorèmes d'existence et d'unicité ne donnent pas un moyen de construire le point de selle. Nous proposons maintenant une méthode constructive qui est une extension directe d'une méthode de SIBONY ([59]) pour les inéquations variationnelles.

7.1. Cas non quadratique.

V_1 et V_2 sont des Hilbert réels dont les produits scalaires sont notés $(.,.)_1$ et $(.,.)_2$. Soient $S_i \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$ symétrique et coercif, $i = 1,2$. S_i définit un produit scalaire $[.,.]_i$ équivalent à $(.,.)_i$ et est inversible.

On suppose que J admet des dérivées de Gateaux $J_i'(v_1, v_2)$, $i = 1,2$. On considère alors la suite $(u_1^m, u_2^m) \in K_1 \times K_2$ définie par

$$(7.1) \qquad u_1^{m+1} = P_1(u_1^m - \rho\, S_1^{-1} J_1'(u_1^m, u_2^m)),$$

$$(7.2) \qquad u_2^{m+1} = P_2(u_2^m + \rho\, S_2^{-1} J_2'(u_1^m, u_2^m)),$$

où P_i est le projecteur sur K_i pour la norme $[.]_i$ et où $\rho > 0$.

On suppose

$$(7.3) \quad \begin{aligned} &< J_1'(v_1, v_2) - J_1'(u_1, u_2), v_1 - u_1 >_1 \\ &- < J_2'(v_1, v_2) - J_2'(u_1, u_2), v_2 - u_2 >_2 \\ &\geq \tau([v_1 - u_1]_1^2 + [v_2 - u_2]_2^2), \ \tau > 0, \qquad \forall\, u_i, v_i \in K_i, \ i = 1,2, \end{aligned}$$

(7.4) pour tout $N > 0$, il existe une constante $d(N) > 0$ telle que $\forall\, u_i, v_i \in K_i$ avec $[u_1]_1^2 + [u_2]_2^2 \leq N^2$, $[v_1]_1^2 + [v_2]_2^2 \leq N^2$, alors

$$< J_1'(v_1, v_2) - J_1'(u_1, u_2), w_1 >_1 - < J_2'(v_1, v_2) - J_2'(u_1, u_2), w_2 >_2 \leq$$
$$\leq d(N)([v_1 - u_1]_1^2 + [v_2 - u_2]_2^2)^{\frac{1}{2}} ([w_1]_1^2 + [w_2]_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, w_i \in K_i, \ i = 1,2.$$

(7.5) J est convexe-concave.

Théorème 7.1.

Sous les hypothèses (7.3), (7.4), (7.5) :

(i) J admet un unique point de selle (u_1, u_2) sur $K_1 \times K_2$;
(ii) la suite (7.1)(resp. (7.2)) converge fortement dans V_1 vers u_1 (resp. dans V_2 vers u_2) pour un choix convenable de (u_1^o, u_2^o) dans $V_1 \times V$ et de ρ (cf. relations (7.12), (7.13), (7.14) ci-après).

<u>Démonstration</u>.

Posons $V = V_1 \times V_2$. Soient $u, v, w \in V$:

$$u = (u_1, u_2) \ , \ v = (v_1, v_2) \ , \ w = (w_1, w_2).$$

Muni du produit scalaire

$$[u \ ; \ v] = [u_1, v_1]_1 + [u_2, v_2]_2 \ ,$$

V est un espace de Hilbert. $K = K_1 \times K_2$ est alors un convexe fermé de V. Soit G opérateur de V dans V' (dual topologique de V) défini par :

$$(7.6) \quad < G(u) \ ; \ v > = < G_1(u_1, u_2), v_1 >_1 + < G_2(u_1, u_2), v_2 >_2 \ ,$$

où

$$G_1(u_1, u_2) = J_1'(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G_2(u_1, u_2) = - J_2'(u_1, u_2).$$

On vérifie facilement que, pour tout $u \in V$, $G(u) \in V'$. Il est clair que (4.20), (4.21) équivaut (cf. remarque 4.3) à

$$(7.7) \quad < G(u) \ ; \ v - u > \geq 0 \qquad \forall \ v \in K \ , \ u \in K \ ,$$

et que (7.1), (7.2) équivaut à

$$(7.8) \qquad S \ w^{m+1} = S \ u^m - \rho \ G(u^m) \ ,$$

$$(7.9) \qquad u^{m+1} = P \ w^{m+1}$$

où P désigne le projecteur sur K pour la norme $[.]$:

$$P(v) = (P_1(v_1), P_2(v_2)) \ ,$$

et où $S \in \mathcal{L}(V, V')$ est défini par

$$< S \ u \ ; \ v > = < S_1 \ u_1, v_1 >_1 + < S_2 \ u_2, v_2 >_2.$$

S est symétrique et coercif, donc inversible. De plus,

$$< S \ u \ ; \ v > = [u \ ; \ v]$$

Les hypothèses (7.3) et (7.4) s'écrivent alors

$$(7.10) \quad < G(u) - G(v) \ ; \ u - v > \geq \tau [u - v]^2 \ , \quad \forall \ u, v \in V \ ,$$

$$(7.11) \quad \forall \ N > 0 \quad \exists \ d(N) > 0 \ \text{ tel que } \ \forall \ u, v \in V \ \text{ avec } \ [u] \leq N \ \text{ et } \ [v] \leq N$$
$$< G(u) - G(v) \ ; \ w > \leq d(N)[u - v] \ [w] \ , \quad \forall \ w \in V.$$

Les conclusions (i) et (ii) découlent alors du corollaire 4.5 et d'un résultat de Sibony sur les inéquations variationnelles ([59], théorème 6.1, page 27). La convergence a lieu pour

(7.12) $\rho < \frac{2\tau}{d(N)^2}$ (convergence optimum pour $\rho = \frac{\tau}{d(N)^2}$),

avec N tel que, si u est le point de selle,

(7.13) $[u] \leq N/2$ et $u^o = (u_1^o, u_2^o)$ tel que $[u - u^o] \leq N/2$ (par exemple $u^o = 0$)

D'après (7.7) et (7.10), un choix possible de N est

(7.14) $$N = 2([\bar{v}] + \frac{\|G(\bar{v})\|_*}{\tau\sqrt{\sigma}} ,$$

où $\bar{v}$ est un élément quelconque de K, où σ = constante de coercivité de S et où $\|.\|_*$ désigne la norme de V'(norme duale).

<u>Remarque 7.1.</u> Le fait que les opérateurs G_1 et G_2 soient les dérivées partielles de J n'intervient pas de façon essentielle dans le théorème 7.1. Celui-ci peut s'appliquer à des problèmes posés directement sous la forme (inéquations variationnelles couplées) :

$$< G_1(u_1, u_2), v_1 - u_1 > \geq 0 \qquad \forall v_1 \in K_1 ,$$

$$< G_2(u_1, u_2), v_2 - u_2 > \geq 0 \qquad \forall v_2 \in K_2 .$$

7.2 - <u>Cas quadratique</u>.

Remarquons que les hypothèses (7.3), (7.4), (7.5) sont vérifiées dans le cas quadratique sous les conditions du théorème 2.3 (i). La méthode (7.1) (7.2) s'applique donc à la résolution du problème (2.1), (2.2) (inéquations variationnelles couplées linéaires) ou du problème de point de selle pour une fonctionnelle de type quadratique (1.1). Cependant nous allons donner une démonstration directe de la convergence des itérations (7.1) (7.2) avec un meilleur choix de ρ que dans le théorème 7.1 (cf. remarque 7.4 ci-après).

Rappelons que la fonctionnelle (1.1) est dérivable, que ses dérivées partielles en v_1 et v_2 sont données par (4.22), (4.23) (remarque 4.4) et que le problème du point de selle équivaut à chercher $u_1 \in K_1$, $u_2 \in K_2$ tels que

(7.15) $$< A_1 u_1 + B u_2 - L_1, v_1 - u_1 >_1 \geq 0 \qquad \forall v_1 \in K_1 ,$$

(7.16) $$< C u_1 + A_2 u_2 - L_2, v_2 - u_2 >_2 \geq 0 \qquad \forall v_2 \in K_2 .$$

avec $C = - B^*$. Mais rappelons que le théorème 2.3 est valable avec C tel que

(7.17) $\quad < B\, v_2, v_1 >_1 + < C\, v_1, v_2 >_2 \geq 0 \qquad \forall\, v_i \in U_i\ ,\ i = 1,2$

Compte tenu de la remarque 7.1, les itérations (7.1), (7.2) s'écrivent alors

(7.18) $\quad u_1^{m+1} = P_1\ (u_1^m - \rho\ S_1^{-1}(A_1\ u_1^m + B\ u_2^m - L_1))$

(7.19) $\quad u_2^{m+1} = P_2\ (u_2^m - \rho\ S_2^{-1}(C\ u_1^m + A_2\ u_2^m - L_2))$

Rappelons encore que les conditions du théorème 2.3 (i) sont

(7.20) $\quad < A_i\ u_i, v_i >_i \geq \alpha_i \|v_i\|_i^2\ , \quad \alpha_i > 0\ ,\ i = 1,2$

Posons

(7.21) $\quad \gamma_i = \dfrac{\alpha_i}{\|S_i\|}\ ,\ [A_i] = \dfrac{\|A_i\|}{\sigma_i}\ ,\ i = 1,2\ ;\ [B] = \dfrac{\|B\|}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}\ ,\ [C] = \dfrac{\|C\|}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}$

où σ_i = constante de coercivité de S_i et

$\|.\|$ = norme d'opérateur.

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 7.2.</u>

Sous les hypothèses (7.20) et les hypothèses sur S_i, $i = 1,2$ et, avec les définitions (7.21), la suite (u_1^m, u_2^m) définie par (7.18), (7.19), converge fortement vers l'unique solution de (7.15), (7.16) pour (u_1^o, u_2^o) quelconque et pour

(7.22) $$0 < \rho < \rho_{max} = \frac{\min\ (\gamma_1, \gamma_2)}{\max([A_1]^2 + [C]^2, [A_2]^2 + [B]^2)}$$

<u>démonstration</u> :

L'existence et l'unicité de la solution (u_1, u_2) de (7.15), (7.16) est assurée par le théorème 2.3 (i) et le théorème 2.2.

Posons $\quad e_i^m = u_i^m - u_i\ ,\ i = 1,2 \qquad$ On a

$[e_1^{m+1}]_1^2 \leq [e_1^m - \rho\ S_1^{-1}(A_1\ e_1^m + B\ e_2^m)]_1^2$, d'où

(7.23) $\quad [e_1^{m+1}]_1^2 \leq [e_1^m]_1^2 - 2\ \rho[S_1^{-1}(A_1\ e_1^m + B\ e_2^m), e_1^m]_1 + \rho^2[S_1^{-1}(A_1\ e_1^m + B\ e_2^m)]_1^2$

D'après (7.20), (7.21) et la définition du produit scalaire $[.,.]_1$ et la norme associée $[.]_1$, on déduit de (7.23)

(7.24) $$[e_1^{m+1}]_1^2 \leq [e_1^m]_1^2 - 2\rho\ \ \gamma_1[e_1^m]_1^2 - 2\rho < B\ e_2^m, e_1^m >_1 + $$
$$+ 2\rho^2([A_1]^2[e_1^m]_1^2 + [B]^2[e_2^m]_1^2)$$

On démontrerait d'une façon analogue

$$(7.25)\quad [e_2^{m+1}]_2^2 \le [e_2^m]_2^2 - 2\rho\,\gamma_2[e_2^m]_2^2 - 2\rho < C\,e_1^m,\ e_2^m >_2 + \\ + 2\rho^2([C]^2[e_1^m]_2^2 + [A_2]^2[e_2^m]_2^2)$$

Par addition de (7.24) et (7.25), compte-tenu de (7.17), on obtient finalement, en posant $e^m = (e_1^m,\ e_2^m)$,

$$(7.26)\qquad [e^{m+1}]^2 \le \theta^2(\rho)\ [e^m]^2$$

où

$$(7.27)\quad \theta^2(\rho) = 1 - 2\rho\ \inf(\gamma_1,\ \gamma_2) + 2\rho^2\ \max([A_1]^2 + [C]^2,\ [A_2]^2 + [B]^2)$$

La convergence a lieu si $\theta(\rho) < 1$ ce qui équivaut à (7.22).

Remarque 7.3.

Le facteur de décroissance de l'erreur, $\theta(\rho)$, est minimum pour

$$(7.28)\qquad S_{opt} = \frac{\rho\ \max}{2}$$

et alors

$$(7.29)\qquad \theta_{opt} = 1 - \frac{\min^2(\gamma_1,\ \gamma_2)}{2\ \max([A_1]^2 + [C]^2,\ [A_2]^2 + [B]^2)}$$

Remarque 7.4.

Dans le cas où (7.15), (7.16) équivaut à un problème de point de selle ($C = -B^*$ et A_i symétrique) alors

$$(7.30)\qquad \rho_{max} = \frac{\min(\gamma_1,\ \gamma_2)}{[B]^2 + \max\limits_{i=1,2}([A_i]^2)}$$

car $\|-B^*\| = \|B\|$.

Remarque 7.4.

On vérifie facilement que les hypothèses (7.3) et (7.4) sont satisfaites avec $\tau = \min(\gamma_1,\ \gamma_2)$ et $d(N)$ indépendant de N,

$$d(N) = d = 2\ \max\ ([A_1],\ [A_2],\ [B],\ [C])$$

Le théorème 7.1 assure alors la convergence pour (cf. (7.12))

$$\rho < \frac{2\tau}{d^2} = \frac{\min\ (\gamma_1,\ \gamma_2)}{2\ \max([A_1],\ [A_2],\ [B],\ [C])^2}$$

c'est-à-dire pour un intervalle de ρ plus petit et donc un facteur de réduction

de l'erreur plus grand que dans le théorème 7.2.

Application à l'exemple 3.1.

Pour simplifier, nous prenons $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\lambda = 0$. Alors

$$a_i(u_i, v_i) = ((u_i, v_i))_{H^1(\Omega)} \tag{7.31}$$

et $A_i = \Lambda$ isomorphisme canonique de $H^1(\Omega)$ sur son dual,

$b(v_2, v_1) = -\int_\Omega v_2 v_1 \, dx$ et $-B$ = injection de $H^1(\Omega)$ dans son dual

On peut prendre $S_i = \Lambda$ et (7.18), (7.19) s'écrit (u_i^o donné dans $H^1(\Omega)$ avec $u_i^o \geq 0$ pp. sur Γ, $i = 1,2$)

$$u_1^{m+1} = P_1(u_1^m(1 - \rho) + \rho \Lambda^{-1}(u_2^m + L_1))$$

$$u_2^{m+1} = P_2(u_2^m(1 - \rho) - \rho \Lambda^{-1}(u_1^m - L_2))$$

A chaque itération on doit résoudre (pour inverser Λ) deux problèmes de Neumann, par exemple pour le calcul de u_1^{m+1},

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + w_1 = u_2^m + f_1 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial n} = g_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On a ainsi "découplé" le problème.

Comme on a choisi $S_i = A_i = \Lambda$, d'après (7.31), on a

$$[u_i, v_i]_i = ((u_i, v_i))_{H^1(\Omega)}$$

et donc $\|S_i\| = \sigma_i = 1$ et (7.30) s'écrit

$$\rho_{max} = \frac{\min(\alpha_1, \alpha_2)}{\|B\|^2 + \|\Lambda\|^2}$$

Or $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\|\Lambda\| = 1$ et $\|B\| = \|-I\| = 1$. Donc

$$\rho_{max} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \rho_{opt} = \frac{\rho_{max}}{2} = \frac{1}{4}$$

ce qui donne d'après (7.29)

$$\theta_{opt} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75.$$

Remarque 7.5.

La méthode proposée dans ce n°7 est inspirée d'une méthode de ARROW-HURWI ([1]) pour un problème de Lagrangien en dimension finie (cf. CEA, [13], ch.V,

pour un problème de Lagrangien en dimension infinie où on généralise une autre méthode d'ARROW-HURWICZ). Elle est voisine des méthodes proposées indépendamment par AUSLENDER ([3]) et TREMOLIERES ([61]) qui utilisent la notion de sous-gradient et les séries divergentes pour un choix de ρ variable avec les itérations et différent pour u_1^m et u_2^m. AUSLENDER propose également une méthode analogue avec ρ constant et commun à u_1^m et u_2^m. On peut également considérer que la méthode présente généralise celle de DEMYANOV donnée dans [21] pour le cas sans contrainte en dimension finie.

§ 8 - Approximation du problème de point de selle.

On se place dans le cadre du n°4. On étudie ici l'approximation du problème de la recherche des points de selle d'une fonctionnelle convexe-concave, définie sur un produit d'espaces de Banach, par un problème analogue en dimension finie.

On considère donc :

(8.1) V_1, V_2 espaces de Banach reflexifs réels de normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$,

(8.2) K_i, sous-ensemble convexe fermé de V_i, $i = 1,2$,

(8.3) J fonctionnelle réelle définie sur $K_1 \times K_2$, strictement convexe-concave.

On suppose

(8.4) $\lim\limits_{\substack{\|v_1\| \to \infty \\ \|v_2\| \leq C}} J(v_1, v_2) = +\infty$, $\forall\, C > 0$; hypothèse sans objet si K_1 est borné,

(8.5) $\lim\limits_{\substack{\|v_1\| \leq C \\ \|v_2\| \to \infty}} J(v_1, v_2) = -\infty$, $\forall\, C > 0$; hypothèse sans objet si K_2 est borné,

(8.6) Pour chaque borné B_2 de K_2, la famille $v_1 \to J(v_1, v_2)$, $v_2 \in B_2$, est équicontinue,

(8.7) Pour chaque borné B_1 de K_1, la famille $v_2 \to J(v_1, v_2)$, $v_1 \in B_1$, est équicontinue.

On rappelle le problème "exact" :

(8.8) trouver $u_1 \in K_1$, $u_2 \in K_2$ tels que

$$J(u_1, v_1) \leq J(u_1, u_2) \leq J(v_1, u_2) \qquad \forall\, v_1 \in K_1,\ \forall\, v_2 \in K_2$$

En utilisant les méthodes de J.P. AUBIN ([2]), nous introduisons maintenant le problème "approché".

On considère deux suites d'espaces V_{h_1} et V_{h_2} de dimension finie où h_1 et h_2 appartiennent à des espaces d'indices de dimension finie, ainsi que deux suites d'opérateurs linéaires continus injectifs p_{h_i} de V_{h_i} dans V_i, $i = 1,2$, appelés prolongements.

On définit K_{h_i}, $i = 1,2$ par la condition

(8.9) $\quad v_{h_i} \in K_{h_i}$ si et seulement si $p_{h_i} v_{h_i} \in K_i$, $i = 1,2$

sur V_{h_i} on définit la norme

(8.10) $\quad \|v_{h_i}\|_{h_i} = \|p_{h_i} v_{h_i}\|_i$, $\quad i = 1,2.$

On pose $h = (h_1, h_2)$ et

(8.11) $$J_h(v_{h_1}, v_{h_2}) = J(p_{h_1} v_{h_1}, p_{h_2} v_{h_2})$$

On suppose enfin

(8.12) Pour tout $v_i \in K_i$ il existe une suite notée $r_{h_i} v_i$ d'éléments de K_{h_i} telle que $p_{h_i} r_{h_i} v_i$ converge vers v_i dans V_i fort.

On définit alors le problème approché :

trouver $u_{1h} \in K_{h_1}$ et $u_{2h} \in K_{h_2}$ tels que

(8.13) $$J_h(u_{1h}, v_{h_2}) \leq J_h(u_{1h}, u_{2h}) \leq J_h(v_{h_1}, u_{2h}) \qquad \forall\, v_{h_i} \in K_{h_i},\ i = 1$$

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 8.1.</u>

Sous les hypothèses (8.1),..., (8.7), (8.9),..., (8.12),

(i) le problème "exact" (8.8) admet une solution unique (u_1, u_2),

(ii) le problème "approché" (8.13) admet une solution unique (u_{1h}, u_{2h}) et $p_{h_i} u_{ih}$ tend vers u_i dans V_i faible lorsque h tend vers 0. De plu

$$\lim_{h \to 0} J_h(u_{1h}, u_{2h}) = J(u_1, u_2).$$

<u>démonstration</u>.

(i) Il suffit de remarquer que les hypothèses (8.1) à (8.7) entraînent que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites.

(ii) Pour l'existence et l'unicité de (u_{1h}, u_{2h}) on applique encore le théorème 4.1 car, en raison des hypothèses sur les p_{h_i} et grâce aux définitions (8.9), (8.10), (8.11), les hypothèses (8.1) à (8.7) sont satisfaites pour V_{h_i}, K_{h_i}, $i = 1,2$, et J_h.

Il reste à démontrer la convergence faible.

De (8.13) on déduit immédiatement

(8.14) $\quad J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} v_{h_2} \leq J(p_{h_1} v_{h_1}, p_{h_2} u_{2h}) \quad \forall v_{h_i} \in K_{h_i}., \; i = 1,2$

Montrons que $p_{h_i} u_{ih}$ est borné, $i = 1,2$. Soit $v_i \in K_i$ fixé.

D'après (8.12), dans (8.14) on peut prendre $v_{h_i} = r_{h_i} v_i$ et $p_{h_i} r_{h_i} v_i$ est borné puisque convergent vers v_i. Si $p_{h_i} u_{ih}$ est non borné pour $i = 1$ et 2 alors, d'après (8.4) et (8.5), (8.14) donne $+\infty \leq -\infty$, ce qui est contradictoire. Si $p_{h_1} u_{1h}$ est non borné et $p_{h_2} u_{2h}$ est borné, d'après (8.6),

(8.15) $\quad \lim_{h \to o} |J(p_{h_1} r_{h_1} v_1, p_{h_2} u_{2h}) - J(v_1, p_{h_2} u_{2h})| = 0.$

Comme $J(v_1, p_{h_2} u_{2h})$ est majoré (car d'après (8.7) la fonction $v_2 \to J(v_1, v_2)$ est s.c.s. donc s.c.s faible puisque concave et $p_2 u_{2h}$ appartient à un borné d'un Banach réflexif),

(8.15) entraîne que $J(p_{h_1} r_{h_1} v_1, p_{h_2} u_{2h})$ est majoré. Or, d'après (8.4), $J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h2} v_2)$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit (8.14). On aboutirait aussi à une contradiction d'une façon analogue si on supposait $p_{h_1} u_{1h}$ borné et $p_{h_2} u_{2h}$ non borné.

Après extractions éventuelles, on peut donc supposer que $p_{h_1} u_{1h}$(resp. $p_{h_2} u_{2h}$) tend vers $w_1 \in K_1$ (resp. $w_2 \in K_2$) dans V_1 faible (resp. dans V_2 faible). On a, d'autre part,

(8.16) $\quad J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h_2} v_2) = [J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h_2} v_2) - J(p_{h_1} u_{1h}, v_2)]$
$\qquad\qquad + J(p_{h_1} u_{1h}, v_2)$

D'après, (8.7), le terme entre crochets dans le second membre de (8.16) tend vers 0 puisque $p_{h_1} u_{1h}$ est borné. On en déduit donc avec la semi-continuité inférieure faible de J par rapport à v_1 (ceci découle de (8.6) et de la convexité de J en v_1),

(8.17) $\liminf_{h \to o} J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h_2} v_2) = \liminf_{h \to o} J(p_{h_1} u_{1h}, v_2) \geq J(w_1, v_2).$

D'une façon analogue, on obtient

(8.18) $\limsup_{h \to o} J(p_{h_1} r_{h_1} v_1, p_{h_2} u_{2h}) = \limsup_{h \to o} J(v_1, p_{h_2} u_{2h}) \leq J(v_1, w_2).$

(8.14), (8.17), (8.18) entraînent

(8.19) $J(w_1, v_2) \leq J(v_1, w_2)$

Comme v_1(resp. v_2) est arbitraire dans K_1(resp. dans K_2)

(8.19) montre que (w_1, w_2) est point de selle de J sur $K_1 \times K_2$.

Donc $w_1 = u_1$, $w_2 = u_2$ et la suite entière u_{1h}(resp. u_{2h}) tend vers u_1(resp. u_2) dans V_1(resp. V_2) faible.

De la double inégalité (8.13) on déduit

$$J(u_1, u_2) \leq \liminf_{h \to o} J_h(u_{1h}, r_{h_2} u_2) \leq \liminf_{h \to o} J_h(u_{1h}, u_{2h}) \leq$$

$$\leq \limsup_{h \to o} J_h(u_{1h}, u_{2h}) \leq \limsup_{h \to o} J_h(r_{h_1} u_1, u_{2h}) \leq J(u_1, u_2), \text{ donc}$$

(8.20) $\lim_{h \to o} J_h(u_{1h}, u_{2h}) = J(u_1, u_2)$

<u>Corollaire 8.1.</u>

Sous les hypothèses du théorème 8.1, si de plus, J admet des dérivées partielles de Gateaux par rapport à v_1 et à v_2 et si J est fortement convexe-concave alors dans la conclusion (ii) du théorème 8.1 la convergence est forte.

<u>démonstration</u>.

Les hypothèses supplémentaires assurent l'existence de deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, telles que

(8.21) $J(p_{h_1} u_{1h}, u_2) - J(u_1, u_2) \geq \langle J_1'(u_1, u_2), p_{h_1} u_{1h} - u_1 \rangle_1$
$+ C_1 \| p_{h_1} u_{1h} - u_1 \|_1^2$

(8.22) $J(u_1, p_{h_2} u_{2h}) - J(u_1, u_2) \leq \langle J_2'(u_1, u_2), p_{h_2} u_{2h} - u_2 \rangle_2$
$- C_2 \| p_{h_2} u_{2h} - u_2 \|_2^2$

D'autre part, (8.13) avec $v_{h_i} = r_{h_i} u_i$, (8.17), (8.18), (8.20) impliquent

(8.23) $J(u_1, u_2) \leq \liminf J(p_{h_1} u_{1h}, u_2) = \liminf J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h_2} u_2)$

$\leq \limsup J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h_2} u_2) \leq \lim J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} u_{2h}) = J(u_1, u_2),$

(8.24) $J(u_1, u_2) = \lim J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} u_{2h}) \leq \liminf J(p_{h_1} r_{h_1} u_1, p_{h_2} u_{2h}) \leq$

$\leq \limsup J(p_{h_1} r_{h_1} u_1, p_{h_2} u_{2h}) = \limsup J(u_1, p_{h_2} u_{2h}) \leq J(u_1, u_2).$

D'où on déduit

(8.25) $\lim J(p_{h_1} u_{1h}, p_{h_2} r_{h_2} u_2) = \lim J(p_{h_1} r_{h_1} u_1, p_{h_2} u_{2h}) = J(u_1, u_2)$

D'après les hypothèses (8.6), (8.7), on déduit de (8.25)

(8.26) $\lim J(p_{h_1} u_{1h}, u_2) = \lim J(u_1, p_{h_2} u_{2h}) = J(u_1, u_2)$

La conclusion découle alors directement de (8.21), (8.22), (8.26) et de la convergence faible.

<u>Remarque 8.1.</u>

Dans le théorème 8.1, les hypothèses sur J sont plus fortes que dans le théorème 4.1 qui assure l'existence et l'unicité pour le problème "exact". Cependant, on vérifie qu'elles sont encore satisfaites pour les fonctionnelles de type quadratique (1.1) sous l'hypothèses (i) du théorème 2.3 et, d'une façon générale, pour les fonctionnelles de type (5.5) sous les hypothèses (5.1) à (5.4) et si $v_i \to J_i(v_i)$ est une <u>application bornée</u>, i.e. transforme les bornés de V_i en bornés de $\mathbb{R}$ (c'est le cas, bien sûr, pour les fonctionnelles (1.1) mais aussi pour la fonctionnelle (5.12) de l'exemple 5.1).

Montrons, par exemple, que (8.4) et (8.6) sont satisfaites.

Rappelons l'inégalité (5.6) :

(8.27) $J(v_1, v_2) \geq \|v_1\|_1 \left(\frac{J_1(v_1)}{\|v_1\|_1} - (M\|v_2\|_2 + \|L_1\|_1^*)\|v_1\|_1\right) - J_2(v_2)$

Si v_2 est borné ($\|v_2\|_2 \leq C$), $J_2(v_2)$ est majoré puisque J_2 est une application bornée, et (8.27) entraîne alors (8.4).

D'autre part, on a

$$J(v_1, v_2) - J(u_1, v_2) = J_1(v_1) - J_1(u_1) + b(v_2, v_1 - u_1) - L_1(v_1 - u_1),$$

d'où

$$|J(v_1, v_2) - J(u_1, v_2)| \leq |J_1(v_1) - J_1(u_1)| + (M\|v_2\|_2 + \|L_1\|_1^*)\|v_1 - u_1\|_1$$

et, si $\|v_2\|_2 \leq C$,

$$|J(v_1, v_2) - J(u_1, v_2)| \leq |J_1(v_1) - J_1(u_1)| + \bar{C}\, \|v_1 - u_1\|_1$$

avec $\bar{C} = MC + \|L_1\|_1^*$, ce qui prouve (8.6) puisque J_1 est continue.

Remarque 8.2.

Les hypothèses du corollaire 8.1 sont vérifiées pour les fonctionnelles (5.5) si $v_i \to J_i(v_i)$ est différentiable et fortement convexe. C'est le cas pour les fonctionnelles (1.1) sous l'hypothèse (i) du théorème 2.3 : en effet

$$J_i(v_i) = a_i(v_i, v_i) \geq \alpha_i \|v_i\|_i^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_i > 0$$

et on a

$$a_i(v_i, v_i) - a_i(u_i, u_i) = 2\, a_i(u_i, v_i - u_i) + a(v_i - u_i, v_i - u_i)$$

ce qui donne bien

$$J_i(v_i) - J_i(u_i) \geq < J_i'(u_i), v_i - u_i >_i + C_i \|v_i - u_i\|_i^2 \quad \text{avec} \quad C_i = \alpha_i .$$

ADDENDA

Remarques sur le théorème 4.1

1°) L'hypothèse de compacité (faible) des ensembles K_1 et K_2 utilisée dans les théorèmes MIN-MAX est remplacée ici par les deux conditions de coercivité sur J

(i) $\forall\, v_2 \in K_2,\ J(v_1, v_2) \to +\infty$ si $\|v_1\|_1 \to \infty$,

(ii) $\forall\, v_1 \in K_1,\ J(v_1, v_2) \to -\infty$ si $\|v_2\|_2 \to \infty$.

Comme l'indique la remarque 4.1, le théorème 4.1 démontre plus que l'existence et l'unicité d'un point de selle. Par contre, la démonstration effective de l'existence d'un point de selle (2° partie de la démonstration du théorème) reste essentiellement valable si, dans (ii), on remplace le quantificateur $\forall$ par $\exists$ et si, dans les hypothèses (4.2) et (4.3) on supprime l'adverbe "strictement". L'hypothèse que V_1 et V_2 soient des espaces strictement convexes ne sert alors que pour la méthode de régularisation (corollaire 4.1).

2°) A. BENSOUSSAN (exposé à l'école d'été "Mathematical Systems Theory and Economics", Varenna, Italie, 15-27 Juin 1970) a donné une autre démonstration de l'existence d'un point de selle où dans (i), (ii) les deux quantificateurs $\forall$ sont remplacés par $\exists$, les autres hypothèses étant les mêmes que dans notre théorème 4.1 (sans l'adverbe "strictement"). L'idée de cette démonstration est d'associer à K_1 et K_2 deux suites K_{1h} et K_{2h} d'ensembles bornés et d'appliquer le théorème de KI-FAN, ce qui donne une suite de points de selle (u_{1h}, u_{2h}) de J sur $K_{1h} \times K_{2h}$ dont on démontre la convergence d'une sous-suite vers un point de selle de J sur $K_1 \times K_2$.

Chapitre II

MINIMISATION DE FONCTIONNELLES DE LA FORME

$$\psi(u) = \sup_v J(u, v)$$

Nous envisageons maintenant l'étude du Pb1 de l'introduction générale. Celle de Pb 2 s'en déduit puisque

$\sup \inf J(u, v) = -\inf \sup (-J(u, v))$.

Au n°1, nous examinons les questions d'existence et d'unicité. Le n°2 contient essentiellement un théorème de différentiabilité faible de la fonction ψ qui permet de donner une condition nécessaire d'optimalité, cette condition étant également suffisante sous une hypothèse de convexité sur J. Au n°3 nous proposons quelques algorithmes de résolution de Pb 1. Le n°4 est consacré à l'approximation du Pb 1 par un problème analogue en dimension finie. Les résultats de chaque paragraphe sont illustrés par un même exemple type, fondamental pour le chapitre III.

§ 1 - Notations, existence, unicité.

Au chapitre I, les deux variables jouant des rôles symétriques, la notation indicée ($i = 1, 2$), bien que d'écriture lourde, s'est avérée commode. Cette symétrie n'existant plus dans l'étude intrinsèque de Pb 1 que nous envisageons maintenant, cette notation ne sera plus utilisée.

Les données sont les suivantes

(1.1) U et W sont deux espaces de Banach réflexifs réels. K(resp. V) est un sous-ensemble de U (resp. W) et J est une fonction numérique finie sur $K \times V$,

(1.2) $v \to J(u, v)$ est, pour tout u de K, s.c. s. pour la topologie faible de W et V est borné faiblement fermé,

(1.3) $u \to J(u, v)$ est, pour tout v de V, s.c.i pour la topologie faible de U et K est borné faiblement fermé,

ou

(1.3 bis) K est un convexe fermé de U,

$u \to J(u, v)$ est, pour tout v de V, convexe s.c.i. et il existe $\bar{v} \in V$ tel que $\lim_{\substack{\|u\| \to \infty \\ u \in K}} J(u, \bar{v}) = +\infty$, cette dernière hypothèse étant sans objet si K est borné.

Rappelons le problème. On pose

(1.4) $$\psi(u) = \sup_{v \in V} J(u, v)$$

On cherche $\bar{u} \in K$ tel que

(1.5) $$\psi(\bar{u}) = \inf_{u \in K} \psi(u) \overset{\text{def}}{=} \bar{\delta}\ ,\ \bar{u} \in K.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.1.

(i) Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3) ou (1.3 bis), il existe au moins un $\bar{u}$ de K tel que (1.5) ait lieu et $\bar{\delta}$ est fini.

(ii) Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3 bis) où $u \to J(u, v)$ est strictement convexe quel que soit $v \in H$, alors il existe un unique $\bar{u}$ de K tel que (1.5) ait lieu.

démonstration.

(i) (1.1) et (1.2) implique

(1.6) $$\psi(u) = \max J(u, v)^{(1)} = J(u, v(u))$$

avec $v(u)$ non nécessairement unique pour u fixé.
D'après (1.6), $\psi(u)$ est fini pour chaque u.

(1.3) implique $\psi(u)$ s.c.i pour la topologie faible de U et donc atteint sa borne inférieure sur le compact faible K.

(1.3 bis) entraîne que $\psi(u)$ est convexe s.c.i et que, comme

$$\psi(u) \geq J(u, \bar{v}) \qquad \forall u \in K,$$

$\lim_{\|u\| \to \infty} \psi(u) = +\infty$. Donc, d'après un résultat classique, toujours grâce à (1.3 bis) $\psi(u)$ atteint sa borne inférieure sur K.

(ii) Il reste à démontrer l'unicité et, pour cela, il suffit de montrer que ψ est strictement convexe. Soient donc $u' \in K$, $u'' \in K$, $u' \neq u''$ et $0 < \theta < 1$.
Posons $u = \theta u' + (1 - \theta)u''$.
$\psi(u) = J(u, v(u)) < \theta\, J(u', v(u)) + (1-\theta)J(u'', v(u)) \leq \theta\, \psi(u') + (1-\theta)\psi(u'')$.

Exemple 1.1.

Soient U, W, Y, trois espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $E \in \mathcal{L}(U, Y)$, F opérateur complètement continu (non nécessairement linéaire) de W dans Y, K un convexe fermé de U, V un convexe fermé borné de W et

---

(1) cf. note 1 de l'introduction générale.

(1.7) $\quad J(u, v) = \|Eu + F(v) + \chi\|_Y^2 + (Nu, u)_U,$

où χ est donné dans Y et où $N \in \mathcal{L}(U, U)$ est symétrique et vérifie $(Nu, u)_U \geq \nu\|u\|_U^2$ avec $\nu \geq 0$.

(1.1) est évidemment vérifiée. Comme F est un opérateur complètement continu, la fonction $v \to J(u, v)$ est continue de W faible dans $\mathbb{R}$ et (1.2) est vérifiée. Si $\nu > 0$, (1.3 bis) est vérifiée avec $\bar{v}$ quelconque dans W et $u \to J(u, v)$ est strictement convexe. Dans ce cas, il existe un unique $\bar{u} \in K$ vérifiant (1.5). Si $\nu = 0$, l'existence subsiste si K est borné, auquel cas (1.3) est vérifiée, mais il n'y a plus nécessairement unicité.

§ 2 - Différentiabilité et condition d'optimalité.

2.1 - On se place dans le cadre général suivant : Soit U un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et ψ une fonctionnelle sur U. Soit k donné dans U.

Rappelons la définition suivante ([13], [62]),

Définition 2.1

ψ est dite différentiable au point u_o dans la direction k, si la fonction réelle d'une variable réelle

(2.1) $$\varphi(\lambda) = \psi(u_o + \lambda k)$$

admet, en $\lambda = 0$, un nombre dérivé à droite $\varphi'_d(o)$, autrement dit si

(2.2) $$\lim_{\lambda \to o^+} \frac{\psi(u_o+\lambda k) - \psi(u_o)}{\lambda} \quad \text{existe et est finie.}$$

La limite (2.2), notée $\psi'(u_o ; k)$ est dite différentielle de ψ au point u_o dans la direction k.

Les données et hypothèses sont maintenant les suivantes :

(2.3) U est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, V un espace topologique séquentiellement compact. Soient u_o et k deux éléments de U. On pose $u_1 = u_o + k$. Soit J une application de $[u_o, u_1[\times V$ dans $\mathbb{R}$.

(2.4) J est s.c.s. sur $[u_o, u_1[\times V$.

(2.5) $\forall v \in V$, $\forall u \in]u_o, u_1[$, J admet une différentielle par rapport à u, au point u, dans les directions k et $-k$ vérifiant $J'_u(u, v ; k) = J'_u(u,v ; -k)$. De plus, $J'_u(u_o, v ; k)$ existe.

(2.6) La fonction $(u, v) \to J'_u(u, v ; k)$ est s.c.s. sur $[u_o, u_1[\times V$.

Pour $u \in [u_o, u_1[$, on pose

(2.7) $$V(u) := \{v | v \in V, J(u, v) = \sup_{w \in V} J(u, w) \overset{\text{def}}{=} \psi(u)\}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1.

Sous les données et hypothèses (2.3) à (2.7), la fonction $u \to \psi(u) = \max_{v \in V} J(u, v)$ définie sur $[u_o, u_1[$ est différentiable en u_o dans la direction k et on a

$$(2.8) \qquad \psi'(u_o ; k) = \max_{v \in V(u_o)} J'_u(u_o, v ; k).$$

démonstration.

Tout d'abord, $\max_{v \in V} J(u, v)$ a bien un sens pour $u \in [u_o, u_1[$, grâce à (2.4) et à l'hypothèse que V est séquentiellement compact. Ceci implique que pour $u \in [u_o, u_1[$, $V(u)$ donné par (2.7) est non vide.

Introduisons la fonction

$$(2.9) \qquad \theta(\lambda, v) = J(u_o + \lambda k, v)$$

définie sur $[0, 1[\times V$.

Cette fonction possède les propriétés suivantes

(2.4') θ est s.c.s sur $[0, 1[\times V$,

(2.5') $\forall v \in V$, $\lambda \to \theta(\lambda, v)$ est dérivable sur $[0, 1[$, soit $\theta'_\lambda(\lambda, v)$ sa dérivée.

(2.6') la fonction $(\lambda, v) \to \theta'_\lambda(\lambda, v)$ est s.c.s. sur $[0, 1[\times V$.

On a alors

$$(2.10) \qquad \psi(u) = \varphi(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \max_{v \in V} \theta(\lambda, v),$$

et (2.8) équivaut à

$$(2.11) \qquad \varphi'_d(o) = \max_{v \in V(o)} \theta'_\lambda(0, v)$$

où $V(\lambda) = V(u)$ avec $u = u_o + \lambda k$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Tout revient donc à montrer (2.11).

1° On a

$$(2.12) \qquad \varphi(\lambda) - \varphi(0) = \theta(\lambda, v(\lambda)) - \theta(0, v(0))$$

où $v(\lambda) \in V(\lambda)$, $v(0) \in V(0)$. (2.12) s'écrit alors

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \theta(\lambda, v(\lambda)) - \theta(\lambda, v(0)) + \theta(\lambda, v(0)) - \theta(0, v(0)),$$

d'où

(2.13) $\varphi(\lambda) - \varphi(0) \geq \theta(\lambda, v(0)) - \theta(0, v(0))$,

puisque $\theta(\lambda, v(\lambda)) \geq \theta(\lambda, v(0))$.

(2.13) implique

(2.14) $$\liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq \liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{\theta(\lambda, v(0) - \theta(0, v(0))}{\lambda} = \theta'_\lambda(0, v(0))$$

et, par conséquent, puisque $v(0)$ est arbitraire dans $V(0)$,

(2.15) $$\liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq \sup_{v \in V(0)} \theta'_\lambda(0, v) = \max_{v \in V(0)} \theta'_\lambda(0, v),$$

la dernière égalité (2.15) ayant un sens car $V(0)$ est séquentiellement fermé dans V et $v \to \theta'_\lambda(0, v)$ est s.c.s grâce à (2.6'). En effet, $V(0)$ est séquentiellement fermé :

Soit $v_n \in V(0)$ tel que $v_n \to v_o$ lorsque $n \to \infty$. On a

$\theta(0, v_n) \geq \theta(0, v)$, $\forall v \in V$,

et, d'après (2.4'),

$$\theta(0, v_o) \geq \limsup_{n \to \infty} \theta(0, v_n) \geq \theta(0, v), \ \forall\, v \in V.$$

Donc $v_o \in V(u_o)$.

2° Majorons maintenant

$$r = \limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda}$$

r est une valeur d'adhérence de $\dfrac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda}$ lorsque $\lambda \to 0^+$.

Il existe donc une suite $\lambda_n \to 0^+$ telle que

(2.16) $$r = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(\lambda_n) - \varphi(0)}{\lambda_n}$$

Soit $v_n \in V(\lambda_n)$. $v_n \in V$ séquentiellement compact on peut extraire une sous-suite v_ν telle que $v_\nu \to v_o \in V$ et $v_o \in V(o)$ car

$\theta(\lambda_\nu, v_\nu) \geq \theta(\lambda_\nu, v)$, $\forall\, v \in V$,

d'où, d'après (2.4') et (2.5') qui entraîne que $\lambda \to \theta(\lambda, v)$ est continue sur $[0, 1[$,

(2.17) $$\theta(0, v_o) \geq \limsup_{\nu \to \infty} \theta(\lambda_\nu, v_\nu) \geq \limsup_{\nu \to \infty} \theta(\lambda_\nu, v) = \theta(0, v).$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_\nu) - \varphi(0) &= \theta(\lambda_\nu, v_\nu) - \theta(0, v_o)\\ &= \theta(\lambda_\nu, v_\nu) - \theta(0, v_\nu) + \theta(0, v_\nu) - \theta(0, v_o)\\ &\leq \theta(\lambda_\nu, v_\nu) - \theta(0, v_\nu).\end{aligned}$$

soit

$$(2.18)\quad \frac{\varphi(\lambda_\nu) - \varphi(0)}{\lambda_\nu} \leq \frac{\theta(\lambda_\nu, v_\nu) - \theta(0, v_\nu)}{\lambda_\nu} = \theta'_\lambda(\alpha_\nu \lambda_\nu, v_\nu),$$

où $0 < \alpha_\nu < 1$. On applique ici la formule des accroissements finis sur l'intervalle $[0, \lambda_\nu]$ ce qui est licite d'après (2.5').

(2.18) et (2.6') implique enfin

$$(2.19)\quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{\varphi(\lambda_\nu) - \varphi(0)}{\lambda_\nu} \leq \theta'_\lambda(0, v_o) \leq \max_{v \in V(0)} \theta'_\lambda(0, v),$$

ce qui, joint à (2.15) et (2.16) donne (2.11).

Remarque 2.1.

Si V est un ensemble fini on dira qu'une suite infinie $\{v_n\}$ d'éléments de V est convergente s'il existe v de V et N tels que pour tout $n \geq N$ on ait $v_n = v$. V est alors séquentiellement compact et, si on suppose que $u \to J(u, v)$ et $u \to J'_u(u, v ; k)$ sont s.c.s., (2.4) et (2.6) sont vérifiées sous la forme

$u_n \to u$ et $v_n \to v$ implique $\limsup J(u_n, v_n) \leq J(u, v)$

(resp) $\limsup J'_u(u_n, v_n ; k) \leq J'_u(u, v ; k)$,

qui est, en fait, la forme utilisée dans la démonstration du théorème 2.1 qui reste donc valable dans ce cas.

Remarque 2.2.

Si $k \to J'_u(u_o, v ; k)$ est linéaire continue, c'est-à-dire, si $u \to J(u, v)$ est différentiable Gateaux en u_o, alors la fonction $k \to \psi'(u_o ; k)$ est sous-additive (donc convexe), positivement homogène (ceci, même si $J'_u(u_o, v ; k)$ n'est pas linéaire en k, résulte de la définition 2.1) et s.c.i comme enveloppe supérieure de fonctions continues.

corollaire 2.1.

Si les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées quel que soient $u_o \in U$ et $k \in U$, alors la conclusion est vraie quel que soient u_o et k.

corollaire 2.2.

Sous les hypothèses du corollaire 2.1, si la fonction

$$u \to J(u, v)$$

admet une dérivée de Gateaux, notée $J'_u(u, v)$, et si $V(u)$ défini en (2.7) est réduit à un élément $v(u)$, alors la fonction ψ est différentiable Gateaux et sa dérivée est donnée par

(2.20) $$\psi'(u) = J'_u(u, v(u)).$$

démonstration.

(2.8) devient

$$\psi'(u ; k) = J'_u(u, v(u) ; k) = < J'_u(u, v(u)), k > \quad \forall\, u, k, \quad \text{où} \quad <.,.>$$

désigne la dualité entre U' (dual topologique de U) et U.

Corollaire 2.3.

Soient

(2.21) U un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, W un espace de Banach réflexif sur $\mathbb{R}$, J une fonction de $U \times V$ dans $\mathbb{R}$ et V un sous ensemble borné de W faiblement fermé.

On suppose

(2.22) J est continue de U fort $\times$ W faible dans $\mathbb{R}$,

(2.23) $u \to J(u, v)$ est différentiable Gateaux quel que soit v de W et $(u, v) \to J'_u(u, v)$ est continue de U fort $\times$ W faible dans U' faible.

Alors $u \to \psi(u) = \max\limits_{v \in V} J(u, v)$ est différentiable dans toutes les directions quel que soit u et

(2.24) $$\psi'(u ; k) = \max_{v \in V(u)} < J'_u(u, v), k > , \qquad \forall\, k, u \in U ,$$

avec $V(u)$ défini en (2.7).

démonstration.

Muni de la topologie faible induite par W, V est un espace séquentiellement compact et compact grâce au théorème d'Eberlein-Shmulyan ([22] p. 430, [5], [66]). Il est immédiat de vérifier que les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites quels que soient u et k. On applique alors le corollaire 2.1.

Exemple 2.1.

Reprenons l'exemple 1.1. Soit Λ_Y (resp. Λ_U) l'isomorphisme canonique de

Y (resp. U) sur son dual topologique Y' (resp. U'). Alors $u \to J(u, v)$ est différentiable Fréchet, et

$$(2.25) \qquad J'_u(u, v) = 2[E^* \wedge_Y (Eu + F(v) + \chi) + \wedge_U Nu].$$

où $E^* \in \mathcal{L}(Y', U')$ est l'opérateur transposé de E. Les hypothèses du corollaire 2.3 sont vérifiées. En particulier, l'hypothèse que F soit un opérateur complètement continu permet d'assurer (2.22). On a donc

$$(2.26) \qquad \psi'(u\,;\,k) = 2 \max_{v \in V(u)} < E^* \wedge_Y (Eu + F(v) + \chi) + \wedge_U Nu, k > ,$$

soit encore

$$(2.27) \qquad \psi'(u\,;\,k) = 2[\max_{v \in V(u)} ((Eu + F(v) + \chi, Ek))_Y + ((Nu, k))_U]$$

Remarque 2.3.

Le théorème 2.1 a été établi par DEMYANOV ([18], [19]) dans le cas : $U = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, J définie sur $\xi \times V$ avec ξ ouvert de $\mathbb{R}^n$, J continue par rapport à v et admettant des dérivées partielles en u continues sur $\xi \times V$, V fini dans [19], V compact dans [18].

Dans le cas où U est un espace de Banach, V un espace compact, $u \to J(u,$ est convexe admettant par rapport à u une dérivée telle que la famille $u \to J'_u(u, v)$ soit équicontinue, et J continue sur $U \times V$ (ce qui est vérifié pour l'exemple 2.1), le théorème 2.1 peut se déduire facilement de résultats généraux sur les sous-gradients et dérivée directionnelle d'une fonction convexe ([3], chap. II, th. 1, 2, 3) et d'un théorème de PSCHENICHNYI ([52] th. 1.6, p. 51), généralisé par VALADIER ([63], cor. du th. 3), caractérisant les sous-gradients de ψ en un point u par des mesures positives concentrées sur $V(u)$.

La démonstration directe que nous donnons ici généralise celle de DANSKIN ([16]) et n'utilise pas d'hypothèse de convexité.

Remarque 2.4.

Dans le corollaire 2.3, W muni de la topologie faible est un espace localement convexe séparé, $v \to J(u, v)$ est faiblement continue. Si V est un convexe fermé borné non vide de W donc un compact faible et si $v \to J(u, v)$ est convexe, on peut appliquer la proposition 1 de [4] (p. 106) : pour chaque u, $v \to J(u, v)$ atteint sa borne supérieure dans V en un point extrémal de V au moins. Si on désigne par $\ddot{V}$ l'ensemble des points extrémaux de V, $\ddot{V}$ est non vide car V est compact dans un espace localement convexe séparé, et on a

(2.28) $$\psi(u) = \max_{v \in \ddot{V}} J(u, v)$$

Si V est faiblement fermé ou est un ensemble fini (ce deuxième cas ayant lieu, par exemple, lorsque $W = \mathbb{R}^n$ et V est un polyèdre convexe), le corollaire 2.3 est encore valable avec V remplacé par $\ddot{V}$. On a donc

(2.29) $$\psi'(u ; k) = \max_{v \in \ddot{V}(u)} J'_u(u, v ; k)$$

où $\ddot{V}(u) = \{v / v \in \ddot{V} , \ \psi(u) = J(u, v)\}$.

2.2 - Une condition d'optimalité.

Soient U un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ψ une fonction numérique finie sur K sous-ensemble convexe de U. On considère le problème de la minimisation de ψ sur K, c'est-à-dire, trouver $\bar{u} \in K$ tel que

(2.30) $$\psi(\bar{u}) \leq \psi(u) \qquad \forall u \in K , \ \bar{u} \in K.$$

Théorème 2.2.

(i) Soit $\bar{u}$ vérifiant (2.30). Si ψ est différentiable dans toutes les directions en tout point u de K, alors

(2.31) $$\psi'(\bar{u} ; u - \bar{u}) \geq 0 , \quad \forall u \in K.$$

(ii) Si ψ est convexe, donc différentiable dans toute direction en tout point u de K, la condition (2.31) est également suffisante pour que $\bar{u}$ vérifie (2.30).

démonstration.

Même démonstration que dans le cas où ψ est différentiable Gateaux ([43]).

Corollaire 2.4.

Sous les hypothèses du corollaire 2.3, pour que $\bar{u}$ minimise $\psi(u) = \max_{v \in V} J(u, v)$ sur K convexe de U, il faut que

(2.32) $$\max_{v \in V(\bar{u})} < J'_u(\bar{u}, v), u - \bar{u} > \geq 0 , \quad \forall u \in K.$$

Si, en outre, $u \to J(u, v)$ est convexe quel que soit v de V, la condition (2.32) est suffisante.

démonstration.

On applique le corollaire 2.3 et le théorème 2.2.

Exemple 2.2.

Reprenons encore l'exemple 1.1. Pour que $\bar{u}$ vérifie (1.5) il faut et il suffit que

$$(2.33) \qquad \max_{v \in V(\bar{u})} ((E\bar{u} + F(v) + \chi, E(u - \bar{u})))_Y + (N\bar{u}, u - \bar{u})_U \geq 0 \qquad \forall u \in K, \bar{u} \in$$

Remarque 2.5.

La condition (2.32) équivaut à

$$(2.34) \qquad \forall u \in K \quad \exists \bar{v} \in V(\bar{u}) \text{ tel que } < J'_u(\bar{u}, \bar{v}), u - \bar{u} > \geq 0.$$

Supposons V convexe et $v \to J(u, v)$ différentiable Gateaux. Alors $v \in V(\bar{u})$ implique $< J'_v(\bar{u}, \bar{v}), v - \bar{v} > \leq 0$, $\forall v \in V$,

et la condition

$$(2.35) \qquad \begin{cases} \forall u \in K , \ \exists \bar{v} \in V \text{ tel que } < J'_v(\bar{u}, \bar{v}), v - \bar{v} > \leq 0 & \forall v \in V \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } < J'_u(\bar{u}, \bar{v}), u - \bar{u} > \geq 0 , \end{cases}$$

est nécessaire pour que $\bar{u}$ minimise ψ sur K. Elle est suffisante si J est convexe-concave (cf. def. chap.I).

Supposons enfin que $V(\bar{u})$ soit réduit à un seul élément $\bar{v}$, par exemple si J est strictement concave par rapport à v.

Alors (2.35) devient

$$(2.36) \qquad \begin{cases} < J'_u(\bar{u}, \bar{v}), u - \bar{u} > \geq 0 , & \forall u \in K , \\ < J'_v(\bar{u}, \bar{v}), v - \bar{v} > \leq 0 , & \forall v \in V. \end{cases}$$

Or, si J est convexe-concave, (2.36) est une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{u}, \bar{v})$ soit point de selle de J sur $K \times V$ (cf. chap. I) On a ainsi obtenu le résultat suivant .

Théorème min-max.

Sous les hypothèses du corollaire 2.3, si V est convexe, si J est convexe-strictement concave et différentiable Gateaux et si inf max $J(u, v)$ = min-max $J(u, v)$ alors il existe un point de selle de J sur $K \times V$ et donc min max $J(u, v)$ = max min $J(u, v)$.

§ 3 - Algorithmes.

Dans ce paragraphe, nous proposons quelques algorithmes pour la recherche des solutions (ou de la solution) de Pb 1.

3.1 - Algorithme 1.

Soit V_o sous ensemble fini de V. Supposons qu'à l'étape k, on connaisse V_k fini contenu dans V. On pose

(3.1) $$\psi_k(u) = \max_{v \in V_k} J(u, v).$$

Soient, u_k vérifiant

(3.2) $$\psi_k(u_k) = \min_{u \in K} \psi_k(u)$$

et v_k, donné par

(3.3) $$J(u_k, v_k) = \psi(u_k) = \max_{v \in V} J(u_k, v).$$

On pose alors

(3.4) $$V_{k+1} = V_k \cup \{v_k\},$$

et on itère le processus avec V_{k+1}.

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses

(3.5) K et V sont deux espaces topologiques compacts,

(3.6) $(u, v) \to J(u, v)$ est continue de $K \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\bar{\delta} = \inf_{u \in K} \sup_{v \in V} J(u, v)$. Alors,

(i) $\bar{\delta}$ est fini et égal à $\min_{u \in K} \max_{v \in V} J(u, v)$, et l'algorithme est bien défini,

(ii) $\psi_k(u_k) \leq \bar{\delta} \leq \psi(u_k)$, $\forall k$,

(iii) s'il existe k tel que $\psi_k(u_k) = \psi(u_k)$ alors u_k est solution, c'est-à-dire $\psi(u_k) = \bar{\delta}$,

(iv) $\psi_k(u_k)$ converge en croissant vers $\bar{\delta}$ et $\psi(u_k)$ converge vers $\bar{\delta}$,

(v) toute valeur d'adhérence w de la suite u_k est solution : $\psi(w) = \bar{\delta}$.

démonstration.

(i) est évident : (3.1), (3.2), (3.3) ont bien un sens, chaque ψ_k et ψ sont s.c.i et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\bar{\delta}$ est fini.

(ii) La suite des ensembles V_k vérifie

(3.7) $\qquad V_k \subset V_{k+1} \subset V \ , \quad \forall k$, donc

(3.8) $\qquad \psi_k(u) \le \psi_{k+1}(u) \le \psi(u) \ , \ \forall k, \quad \forall u \in K$,

[illegible]

(3.9) $\qquad \psi_k(u_k) \le \psi_{k+1}(u_{k+1}) \le \bar{\delta} \quad , \quad \forall k.$

On a, évidemment, $\bar{\delta} \le \psi(u_k)$ pour tout k. D'où le résultat.

(iii) découle directement de (ii).

(iv), (v) K étant compact, la suite u_k admet au moins une valeur d'adhérence w. Donc, quel que soit θ voisinage de w, il existe k_1 et k_2, avec $k_1 < k_2$ tels que $u_{k_1} \in \theta$ et $u_{k_2} \in \theta$.

D'autre part, les hypothèses V compact et (3.6) entraînent que la famil $u \to J(u, v)$ est équicontinue, c'est-à-dire, en particulier,

(3.10) $\begin{cases} \forall \ \epsilon > 0 \ \text{ il existe } \ \theta_w \ \text{ voisinage de } \ w \ \text{ tel que} \\ u \in \theta_w \ \text{ implique } \ |J(u, v) - J(w, v)| \le \epsilon \qquad \forall v \in V \ . \end{cases}$

Comme, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe u_{k_1} et u_{k_2} avec $k_1 < k_2$, dans θ_w, (3.10) implique successivement

(3.11) $\quad J(w, v) \le J(u_{k_1}, v) + \epsilon \le J(w, v) + 2\epsilon \le J(u_{k_2}, v) + 3\epsilon, \qquad \forall \ v \in V$

La première inégalité (3.11) implique

$$\psi(w) \le \psi(u_{k_1}) + \epsilon$$

or $\qquad \psi(u_{k_1}) + \epsilon = J(u_{k_1}, v_{k_1}) + \epsilon$, d'après (3.3)

$$\le J(u_{k_2}, v_{k_1}) + 3\epsilon \ , \text{ d'après } (3.11).$$

Comme $k_1 < k_2$, on a , d'après (3.7),

$$J(u_{k_2}, v_{k_1}) \le \max_{v \in V_{k_2}} J(u_{k_2}, v) = \psi_{k_2}(u_{k_2}).$$

Finalement, d'après (3.9), on obtient

(3.12) $\qquad \bar{\delta} \le \psi(w) \le \psi_{k_2}(u_{k_2}) + 3\epsilon \le \psi_k(u_k) + 3\epsilon \le \bar{\delta} + 3\epsilon \ , \quad \forall k \ge k_2$

(3.12) montre que $\psi_k(u_k)$ converge (en croissant d'après (3.9)) vers $\bar{\delta}$ et que $\psi(w) = \bar{\delta}$. Il reste à démontrer la convergence de $\psi(u_k)$ vers $\bar{\delta}$. Les hypothèses V compact et (3.6) entraînent que $u \to \psi(u)$ est continue. Par conséquent, $\bar{\delta}$ est une valeur d'adhérence de $\psi(u_k)$ et c'est l'unique valeur d'adhérence de $\psi(u_k)$. En effet soit α une valeur d'adhérence de $\psi(u_k)$. Il

existe une sous-suite u_{k_i} telle que $\psi(u_{k_i})$ converge vers α. Pour toute valeur d'adhérence w de u_{k_i}, w est valeur d'adhérence de u_k et donc $\psi(w) = \bar{\delta}$, et $\psi(w)$ est valeur d'adhérence de $\psi(u_{k_i})$ et donc $\psi(w) = \alpha$ puisque α est limite donc unique valeur d'adhérence de $\psi(u_{k_i})$. Donc $\alpha = \bar{\delta}$. Comme $\psi(u_k)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ ($\bar{\delta} \leq \psi(u_k) \leq \max_{K \times V} J(u, v)$), $\bar{\delta}$ est limite de $\psi(u_k)$.

3.2. Algorithme 2.

3.2.1 - Description et convergence.

On se donne a priori une suite croissante pour l'inclusion de sous-ensembles finis V_k de V :

(3.13) $\qquad V_k \subset V_{k+1} \subset V \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$

Pour chaque k on définit $\psi_k(u)$ comme en (3.1) et u_k comme en (3.2).

Théorème 3.2.

Sous les hypothèses du théorème 3.1, si on suppose de plus (3.13) et que $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ est dense dans V (ceci est possible si et seulement si V est séparable) et que K est séquentiellement compact, alors on a les mêmes conclusions qu'au théorème 3.1.

démonstration.

(i), (ii), (iii). La démonstration est identique.

(iv), (v). Soit w une valeur d'adhérence de la suite u_k. Comme K est séquentiellement compact, il existe une sous-suite u_{k_i} qui tend vers w.

Montrons que $\psi(u_{k_i}) - \psi_{k_i}(u_{k_i})$ tend vers 0 : on a

(3.14) $\quad \psi(u_{k_i}) - \psi_{k_i}(u_{k_i}) \leq |\psi(u_{k_i}) - \psi(w)| + |\psi(w) - \psi_{k_i}(w)| + |\psi_{k_i}(w) - \psi_{k_i}(u_{k_i})|$

De la continuité de J par rapport à v et des hypothèses de croissance et de densité des V_k il résulte que

(3.15) $\qquad \lim_{k \to \infty} \psi_k(u) = \psi(u) \ , \quad \forall u \in K.$

Donc,

(3.16) $\quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists\, k_1 \ , \ k_i \geq k_1$ implique $|\psi(w) - \psi_{k_i}(w)| \leq \varepsilon$

La fonction ψ étant continue et u_{k_i} convergeant vers w,

(3.17) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, k_2\ ,\ k_i \geq k_2$ implique $|\psi(u_{k_i}) - \psi(w)| \leq \varepsilon$.

Les hypothèses V compact et $(u, v) \to J(u, v)$ continue entraînent que la famille ψ_k est équicontinue et donc

(3.18) $\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, k_3\ ,\ k_i \geq k_3$ implique $|\psi_{k_i}(u_{k_i}) - \psi_{k_i}(w)| \leq \varepsilon$

Regroupant (3.14), (3.16), (3.17), (3.18) on obtient bien $\psi(u_{k_i}) - \psi_{k_i}(u_{k_i})$ tend vers 0. Donc, d'après (3.9), les suites $\psi_{k_i}(u_{k_i})$ et $\psi(u_{k_i})$ convergent vers $\bar{\delta}$. Mais la suite entière $\psi_k(u_k)$ est croissante et majorée donc convergente et nécessairement $\lim \psi_k(u_k) = \bar{\delta}$. D'autre part, la continuité de ψ entraînent que $\psi(u_{k_i})$ converge vers $\psi(w)$ et donc $\psi(w) = \bar{\delta}$.

La démonstration se termine comme dans le théorème 3.1.

Remarque 3.1.

Le principe des algorithmes 1 et 2 est de remplacer le PROBLEME 1 par une suite de problèmes analogues où V est un ensemble fini. L'algorithme 1 est inspiré du premier algorithme de REMES ([14]) pour l'approximation de Tschebyscheff linéaire, généralisé par CHENEY-GOLDSTEIN ([15], [27]) à la programmation convexe lorsque la fonction coût est l'enveloppe supérieure de fonctions affines et les contraintes sont linéaires ; voir une autre extension dans AUSLENDER ([3], chap. VI).

Dans l'algorithme 1, la construction de u_k qui peut être réalisée par un des algorithmes que nous proposons dans la suite, est subordonnée à celle de v_{k-1}, celui-ci devant réaliser un maximum absolu sur V. La détermination d'un tel v_{k-1} n'est pas un problème simple si V et J ne vérifient pas de "bonne conditions : par exemple, V fini ou J concave par rapport à U et V convex. Au contraire, l'algorithme 2, lorsque les conditions de son application sont réalisées, ne nécessite pas le calcul de v_{k-1}.

Corollaire 3.1.

(i) Les théorèmes 3.1 et 3.2 sont valables si on suppose que K est un sous-ensemble convexe fermé borné de U espace de Banach réflexif réel, que V est un espace topologique compact et que J est continue de U faible $\times\, V$ dans $\mathbb{R}$.

(ii) Si, de plus, J est strictement convexe par rapport à u pour u dans et quel que soit v dans V, alors la suite u_k tout entière converge vers l'unique solution du PROBLEME 1.

démonstration.

(i) Pour la topologie faible induite par U, K est un espace compact et séquentiellement compact. Donc (3.5) et (3.6) sont vérifiées.

(ii) ψ est alors strictement convexe et donc atteint sa borne inférieure en un point unique $\bar{u}$ de K. Donc u_k admet l'unique valeur d'adhérence $\bar{u}$ et comme u_k appartient à un espace compact, $\lim u_k = \bar{u}$.

3.2.2 - Application à l'exemple 1.1.

Si dans l'exemple 1.1 on suppose de plus que E et N sont des opérateurs compacts alors J est continue sur U faible $\times$ W faible. Par exemple, si θ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et si $U = L^2(\theta)$ on pourra prendre $(Nu, v) = \nu \int_\theta u \int_\theta v$ donc $(Nu, u) = \nu(\int_\theta u)^2$ ce qui est licite car $L^2(\theta) \subset L^1(\theta)$.

Si $\nu > 0$ et si

$$K = \{u | u \in L^2(\theta) \ , \ 0 \leq u(x) \leq M \text{ pp. sur } \theta\},$$

K est un convexe fermé borné de U et J est strictement convexe par rapport à u sur K car N est défini positif (mais non coercif, d'où la nécessité de supposer K borné). Le corollaire 11.1 s'applique donc.

Cependant, la fonctionnelle J de l'exemple 1.1 (sous les hypothèses initiales) se présente sous la forme

(a) $$J(u, v) = J_o(u, v) + J_1(u)$$

où

(b) $u \to J_o(u, v)$ est, quel que soit $v \in V$, convexe ≥ 0, et où, si $\nu > 0$,

(c) J_1 est strictement convexe continue et $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J_1(u) = +\infty$.

Si on suppose de plus E compact, alors, lorsque K (resp. V) est muni de la topologie faible induite par U (resp. par W), V est séquentiellement compact et

(d) $(u, v) \to J_o(u, v)$ est continue sur $K \times V$ et $u \to J_1(u)$ est s.c.i sur K.

Les principales conclusions concernant l'algorithme 2 restent alors valables sans supposer K borné ni N compact. Plus précisément, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.

Sous les hypothèses (a), (b), (c), (d), si K est un convexe fermé de espace de Banach réflexif réel et V un espace topologique séquentiellement

compact et si $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ (V_k donnés vérifiant (3.13)) est dense dans V alors, pour l'algorithme 2, les conclusions (i), (ii), (iii) du théorème 3.1 subsistent, $\psi_k(u_k)$ converge en croissant vers $\bar{\delta}$ et u_k tend faiblement vers l'uniqu solution de Pb 1.

<u>démonstration.</u>

(i) découle du théorème 1.1.

(ii), (iii) même démonstration qu'au théorème 3.1.

Montrons que la suite u_k est bornée :

$$\bar{\delta} \geq \psi_k(u_k) \geq J(u_k, v) \geq J_1(u_k)$$

et, d'après (c) on aboutirait à une contradiction en supposant u_k non bornée. On peut donc extraire une sous-suite u_{k_i} qui converge faiblement vers u^* et u^* est dans K. On a

$$\psi_{k_i}(u_{k_i}) = J_o(u_{k_i}, v_{k_i}) + J_1(u_{k_i}) \quad \text{et}$$

$$J_o(u_{k_i}, v_{k_i}) \geq J_o(u_{k_i}, w) \qquad \forall w \in V_{k_i}$$

Soit v fixé dans V. D'après les hypothèses de densité et de croissance sur les V_k et d'après (d),

$$\text{(e)} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } k_\varepsilon \text{ tel que pour tout } k_i \geq k_\varepsilon \text{ il existe } w_{k_i} \in V_{k_i} \text{ tel q} \\ \qquad J_o(u_{k_i}, w_{k_i}) \geq J_o(u^*, v) - \varepsilon \end{cases}$$

V étant séquentiellement compact, on peut extraire de v_{k_i} une sous suite $v_{k_{i_j}}$ qui converge vers $\bar{v}$ de K et d'après (d) on a

$$\text{(f)} \qquad \lim_{k_{i_j} \to \infty} J_o(u_{k_{i_j}}, v_{k_{i_j}}) = J_o(u^*, \bar{v}) ,$$

ce qui, joint à (e) donne $J_o(u^*, \bar{v}) = \max_{w \in V} J_o(u^*, w)$ puisque v est arbitrair dans V. D'autre part, (d) implique aussi

$$\liminf J_1(u_{k_{i_j}}) \geq J_1(u^*) .$$

On a donc

$$\liminf \psi_{k_{i_j}}(u_{k_{i_j}}) = \lim J_o(u_{k_{i_j}}, v_{k_{i_j}}) + \liminf J_1(u_{k_{i_j}}) \geq \psi(u^*)$$

Mais la suite $\psi_k(u_k)$ tout entière est convergente puisque croissante et majoré (par $\bar{\delta}$). Donc

$$\bar{\delta} \leq \psi(u^*) \leq \lim \psi_k(u_k) \leq \bar{\delta}$$

c'est-à-dire

$$\lim \psi_k(u_k) = \psi(u^*) = \bar{\delta} .$$

D'après (b), (c) ψ est strictement convexe. Donc u^* est l'unique solution et la suite entière u_k converge (faiblement) vers u^*.

3.3 - Algorithme 3.

On remarque d'abord que Pb 1 peut se ramener à un problème de minimisation avec contraintes. En effet, on a le résultat suivant

Théorème 3.3.

Le PROBLEME 1 est équivalent au problème suivant :

PROBLEME 1 bis. Trouver $\bar{u} \in K$ et $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ tels que

$J(\bar{u}, v) \leq \bar{\varepsilon}$, $\forall v \in V$ et

$\bar{\varepsilon} = \inf \{\varepsilon | (J(u, v) \leq \varepsilon, \ \forall v \in V$ et $u \in K\}$

démonstration.

Pour u fixé dans K on a

$$\sup_{v \in V} J(u, v) = \min \{\varepsilon | J(u, v) \leq \varepsilon, \ \forall v \in V\},$$

donc

$$\inf_{u \in K} \sup_{v \in V} J(u, v) = \inf_{u \in K} \min_{J(u, v) \leq \varepsilon, \ \forall v \in V} \varepsilon$$

$$= \inf_{\substack{J(u,v) \leq \varepsilon, \ \forall v \in V \\ u \in K}} \varepsilon$$

c.q.f.d

Si V est un ensemble fini, l'algorithme 3 consiste alors à employer une méthode de pénalisation pour résoudre le PROBLEME 1 bis, c'est-à-dire minimiser par rapport à $(u, \varepsilon) \in U \times \mathbb{R}$ les fonctions

$$\varepsilon + \frac{1}{\eta} \sum_{v \in V} [(J(u, v) - \varepsilon)^+]^p$$

où p est un entier positif, η positif destiné à tendre vers 0 et

$$(J(u, v) - \varepsilon)^+ = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad J(u, v) \leq \varepsilon \\ J(u, v) - \varepsilon & \text{si} \quad J(u, v) > \varepsilon \end{cases}$$

Si les conditions du théorème 1.1 sont réalisées (avec (9.3 bis)), le PROBLEME 1 bis est un problème de programmation convexe : minimiser la forme linéaire $L(u, \varepsilon) = \varepsilon$ sur le convexe fermé de $U \times \mathbb{R}$,

$$K' = \{(u, \varepsilon) | (J(u, v) - \varepsilon \leq 0, \ \forall v \in V) \text{ et } u \in K\}$$

La méthode de pénalisation est alors convergente ([59]).

3.4 - Algorithme 4.

3.4.1 - Description et convergence.

On suppose que K est un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $u \to J(u, v)$ admet, quel que soit v dans V, une dérivée de Gateaux $J'_u(u, v)$.

Soit u_o donné dans K et v_o dans V vérifiant

$$J(u_o, v_o) = \max_{v \in V} J(u_o, v). \tag{3.19}$$

Supposons déterminés u_j de K et v_j de V pour $0 \leq j \leq k-1$. On pose

$$\delta_k(u) = \max_{o \leq j \leq k-1} (J(u_j, v_j) + < J'_u(u_j, v_j), u - u_j >) \tag{3.20}$$

u_k est alors déterminé par

$$\delta_k(u_k) = \min_{u \in K} \delta_k(u) , \quad u_k \in K, \tag{3.21}$$

puis v_k de V par

$$J(u_k, v_k) = \max_{v \in V} J(u_k, v). \tag{3.22}$$

Théorème 3.4.

Sous les hypothèses

(3.23) K est un sous-ensemble convexe fermé borné de U espace de Banach réflexif réel,

(3.24) la fonction $u \to J(u, v)$ est, quel que soit v dans V, convexe et admet une dérivée de Gateaux $J'_u(u, v)$ uniformément bornée sur $K \times V$.

(3.25) V est un ensemble fini ou un espace topologique compact auquel cas $v \to J(u, v)$ est s.c.s,

alors

(i) les définitions (3.19) à (3.22) ont un sens et
$\bar{\delta} \overset{def}{=} \inf \sup J(u, v) = \min \max J(u, v)$,

(ii) $\delta_k(u_k) \leq \bar{\delta} \leq \psi(u_k), \quad \forall k$,

où $\psi(u) = \max_{v \in V} J(u, v)$,

(iii) $\delta_k(u_k)$ converge en croissant vers $\bar{\delta}$,

$\bar{\delta}$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $\psi(u_k)$. Si celle-ci est majorée alors $\lim \psi(u_k) = \bar{\delta}$.

(iv) toute valeur d'adhérence de la suite u_k est solution.

démonstration.

(i) Les définition (3.19), (3.20), (3.22) sont, avec évidence, licites. Pour (3.21), on remarque que les δ_k sont des fonctions convexes s.c.i comme enveloppes supérieures de fonctions affines continues. Par conséquent, (3.21) a un sens puisque K est faiblement compact.

D'autre part, l'hypothèse J convexe et dérivable Gateaux par rapport à u entraîne que J est s.c.i. par rapport à u. Donc ψ est convexe s.c.i et atteint sa borne inférieure sur K.

(ii) La deuxième inégalité est évidente.

La convexité de J par rapport à u entraîne

$$(3.26) \quad J(u_j, v_j) + < J'_u(u_j, v_j), u - u_j > \leq J(u, v_j), \quad \forall j \geq 0, \quad \forall u \in K$$

d'où

$$(3.27) \quad \delta_k(u) \leq \delta_{k+1}(u) \leq \psi(u) , \quad \forall k \geq 0 , \quad \forall u \in K$$

et, en passant à la borne inférieure sur K,

$$(3.28) \quad \delta_k(u_k) \leq \delta_{k+1} (u_{k+1}) \leq \bar{\delta}, \quad \forall k \geq 1.$$

(iii), (iv) La suite u_k appartenant à un compact faible de U, on peut en extraire une suite u_{k_i} qui converge faiblement vers w de K. D'après (3.28), la suite $\delta_k(u_k)$ est convergente.

Pour tout $j > i$, on a

$$(3.29) \quad J(u_{k_i}, v_{k_i}) + < J'_u(u_{k_i}, v_{k_i}), u_{k_j} - u_{k_i} > \leq \max_{0 \leq \ell \leq k_j - 1} (J(u_\ell, v_\ell) + < J'_u(u_\ell, v_\ell), u_{k_j} - u_\ell >) = \delta_{k_j}(u_{k_j})$$

ce qui s'écrit encore, d'après la définition (3.22) et (3.28),

$$(3.30) \quad \psi(u_{k_i}) + < J'_u(u_{k_i}, v_{k_i}), u_{k_j} - u_{k_i} > \leq \delta_{k_j}(u_{k_j}) \leq \bar{\delta}$$

ψ étant convexe s.c.i, J'_u uniformément bornée et u_{k_i} et u_{k_j} convergeant faiblement vers w, (3.30) implique

$$(3.31) \quad \bar{\delta} \leq \psi(w) \leq \liminf \psi(u_{k_i}) \leq \limsup \psi(u_{k_i}) \leq \lim \delta_k (u_{k_j}) \leq \bar{\delta} .$$

(3.31) montre que $\delta_k(u_k)$ converge en croissant, d'après (3.28), vers $\bar{\delta}$, que w étant une valeur d'adhérence arbitraire de la suite u_k, on a $\psi(w) = \bar{\delta}$ et

que $\lim \psi(u_{k_i}) = \bar{\delta}$. Ce dernier résultat prouve que $\bar{\delta}$ est valeur d'adhérence de $\psi(u_k)$. On démontrerait, exactement comme en (v) du théorème 3.1 que c'est l'unique valeur d'adhérence et que, si $\psi(u_k)$ est majorée, elle converge vers $\bar{\delta}$

Remarque 3.2.

L'algorithme 4 est en fait une extension de la méthode du plan sécant de KELLEY ([34], [3] chap. V) appliquée au PROBLEME 1 bis. Il permet de ramener le PROBLEME 1 à une suite de problèmes analogues où V est fini et surtout, où J est linéaire affine par rapport à u : détermination de u_k par (3.21). En dimension finie sur u et si K est un polyèdre convexe fermé, la détermination de u_k peut se faire par la méthode de CHENEY-GOLDSTEIN ([15], algorithme 5) ou par toute méthode de programmation linéaire appliquée au PROBLEME 1 bis associé.

A chaque étape on doit déterminer un v_k de $V(u_k)$ (cf. def. (2.7)). Dans les conditions du théorème 2.1, on peut penser à appliquer, pour minimiser ψ sur K, la méthode de FRANK et WOLFE généralisée par AUSLENDER ([3]) ou DEMYANOV ([18]) et qui permet également de "linéariser" le problème. Mais, à chaque étape on devrait, compte tenu de l'expression de la différentielle directionnelle de ψ (cf. relation (2.8)), trouver tous les éléments de $V(u_k)$.

Corollaire 3.3.

Si, aux hypothèses du théorème 11.4 on ajoute

(3.32) J est fortement convexe par rapport à u, i.e.

$$J(\theta u + (1-\theta)\bar{u}, v) \leq \theta J(u, v) + (1-\theta)J(\bar{u}, v) - \theta(1-\theta)c(v)\|u - \bar{u}\|^2$$

$$\forall u, \bar{u} \in K, \forall \theta \in [0, 1], \forall v \in V, c(v) > 0 \quad \forall v \in V,$$

et si on suppose que ψ est majorée sur K, alors la suite u_k converge fortement vers l'unique solution de Pb 1.

démonstration.

D'après les conclusions (iii) et (iv), la suite u_k est une suite minimisante de ψ sur K et converge faiblement vers l'unique $\bar{u}$ tel que $\psi(\bar{u}) =$ car (3.32) entraîne que ψ est strictement convexe. D'autre part (3.32) implic

$$\psi(u_k) \geq J(u_k, v) \geq J(\bar{u}, v) + \langle J'_u(\bar{u}, v), u_k - \bar{u} \rangle + c(v)\|u_k - \bar{u}\|^2, \quad \forall v \in V. \tag{3.33}$$

En particulier, soit $\bar{v}$ fixé dans $V(\bar{u})$ (cf. def. (2.7)), alors (3.33) donne

(3.34) $\psi(u_k) \geq \psi(\bar{u}) + < J'_u(\bar{u}, \bar{v}), u_k - \bar{u} > + c(\bar{v})\|u_k - \bar{u}\|^2$

Comme $\psi(u_k) \to \bar{\delta} = \psi(\bar{u})$ et que $u_k \to \bar{u}$ faiblement, il résulte de (3.34) que $u_k \to \bar{u}$ fortement.

3.4.2 -Application à l'exemple 1.1.

Si $\nu > 0$, la fonction $u \to (Nu, u)_U$ est fortement convexe et donc J est fortement convexe par rapport à u avec $c(v) = \nu$. Si K est borné, la suite u_k construite par l'algorithme 4 converge donc fortement vers la solution. La relation (3.20) s'écrit (cf. exemple 2.1)

(3.35) $\delta_k(u) = \max\limits_{o \leq j \leq k-1} [(Eu_j + F(v_j) + \chi, Eu + Fv_j + \chi))_Y + (Nu_j, u)_U]$.

D'autre part, puisque K et V sont bornés, il existe une constante $c > 0$ telle que

$J(u, v) \leq c \qquad \forall u \in K , \quad \forall v \in V$

Par conséquent, ψ est majorée. Le corollaire 3.3 s'applique.

3.5 - Méthodes de sous-gradient.

Nous montrons, dans ce numéro, comment on peut adapter à la situation présente les méthodes de sous-gradient développées dans [3].

Définition 3.1. ([47], [56], [3]).

Soit U un espace vectoriel topologique réel et ψ une fonction numérique définie sur U. On appelle sous différentiel $\partial\psi(u_o)$ au point u_o le sous-ensemble de U'(dual topologique de U), éventuellement vide, défini par :

(3.36) $\partial\psi(u_o) = \{u^* \in U' | \psi(u) \geq \psi(u_o) + < u^*, u - u_o > , \qquad \forall u \in U\}$

Les éléments de $\partial\psi(u)$ sont appelés sous gradients de ψ au point u.

On démontre le résultat général suivant

Proposition 3.1. [47].

Si ψ est convexe, en tout point u_o où ψ est continue et finie l'ensemble $\partial\psi(u_o)$ n'est pas vide et est convexe faiblement fermé.

Nous allons donner l'expression du sous différentiel dans le cas particulier qui nous intéresse c'est-à-dire lorsque ψ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions convexes différentiables.

Proposition 3.2.

Soient U un espace vectoriel topologique réel et V un ensemble. Soit

J une fonction numérique finie définie sur $U \times V$. On suppose que $\psi(u) = \max_{v \in V} J(u, v)$ a un sens quel que soit u de U et que $u \to J(u, v)$ est convexe et admet une dérivée de Gateaux $J'_u(u, v)$. Alors l'ensemble $\partial\psi(u_o)$ contient les éléments de la forme $J'_u(u_o, v)$ où $v \in V(u_o)$ (cf. def.(27)), quel que soit u_o de U.

<u>démonstration.</u>

On a

$$\psi(u) \geq J(u, v) \geq J(u_o, v) + < J'_u(u_o, v), u - u_o >, \quad \forall v \in V$$

soit

$$(3.37) \qquad \psi(u) \geq \psi(u_o) + < J'_u(u_o, v), u - u_o > , \quad \forall v \in V(u_o)$$

ce qui correspond bien à la définition 3.1.

<u>Remarque 3.3.</u>

Posons

$$S(u_o) = \{u^* \in U' | u^* = J'_u(u_o, v), v \in V(u_o)\}$$

La proposition 3.2 montre que $\partial\psi(u_o) \supset S(u_o)$. En fait, d'après un théorème de PSCHENICHNYI ([52], th. 1.5 p.50) généralisé par VALADIER ([63], th 3 p.8), si V est un espace compact et si J est continue sur $U \times V$ alors $\partial\psi(u_o)$ est égal à l'enveloppe convexe fermée de $S(u_o)$.

Les considérations qui précèdent permettent d'adapter facilement les méthod de [3], chapitre V. Donnons en un exemple.

On suppose

(3.38) U est un espace de Hilbert réel, K un sous ensemble convexe fermé born de U.

(3.39) V est un espace séquentiellement compact (et peut donc être un ensemble fini d'après la remarque 2.1),

(3.40) J est une fonction numérique finie continue sur $K \times V$.

$u \to J(u, v)$ admet, quel que soit v de V, une dérivée de Gateaux $J'_u(u,$ continue de $K \times V$ dans U' faible et uniformément bornée sur $K \times V$.

(3.41) $u \to J(u, v)$ est, quel que soit v de V, fortement convexe, i.e

$$J(u_1, v) \geq J(u_2, v) + < J'_u(u_2, v), u_1 - u_2 > + \alpha\|u_1 - u_2\|^2, \ \forall v \in V, \ \forall u_1, u_2 \in K$$

où $\alpha > 0$ est indépendant de v.

L'algorithme, adaptation directe de la méthode 3 de [3] chap. V, est le suivant :

On construit à partir de u_o donné dans K les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ comme suit : supposons connu u_n de K, alors v_n est déterminé par

$$(3.42) \qquad J(u_n, v_n) = \max_{v \in V} J(u_n, v) \quad , \quad v_n \in V,$$

puis u_{n+1} par

$$(3.43) \qquad u_{n+1} = P_K(u_n - \rho \Lambda^{-1} J'_u(u_n, v_n))$$

où $\rho > 0$, P_K = projecteur sur K et

Λ = isomorphisme canonique de U sur U'.

Avant d'étudier la convergence de la méthode démontrons le lemme suivant :

Lemme 3.1.

L'hypothèse (3.41) entraîne

$$(3.44) \qquad < J'_u(u_1, v_1) - J'_u(u_2, v_2), u_1 - u_2 > \geq 2\alpha \|u_1 - u_2\|^2$$

$$\forall u_1, u_2 \in K, \forall v_1 \in V(u_1) , \quad \forall u_2 \in V(u_2).$$

démonstration.

On a

$$\psi(u_{3-i}) \geq J(u_{3-i}, v) \geq J(u_i, v) + < J'_u(u_i, v), u_{3-i} - u_i > + \alpha\|u_1 - u_2\|^2, \ i = 1,2$$

$$\forall v \in V$$

ce qui entraîne

$$\psi(u_1) \geq \psi(u_2) + < J'_u(u_2, v), u_1 - u_2 > + \alpha\|u_1 - u_2\|^2, \quad \forall v \in V(u_2)$$

$$\psi(u_2) \geq \psi(u_1) + < J'_u(u_1, v), u_2 - u_1 > + \alpha\|u_1 - u_2\|^2, \quad \forall v \in V(u_1)$$

d'où (3.44).

Le résultat complet est le suivant

Théorème 3.5.

Sous les hypothèses (3.38) à (3.41), le Pb 1 a une solution unique $\bar{u}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\rho(\varepsilon)$ tel que si $\rho \leq \rho(\varepsilon)$ il existe $n(\varepsilon, \rho)$ tel que pour $n \geq n(\varepsilon, \rho)$

$$(3.45) \qquad \|u_n - \bar{u}\| \leq \varepsilon$$

Si de plus ψ est continue (par exemple si V est fini ou compact) on a la même pseudo-convergence de la suite $\psi(u_n)$ vers $\psi(\bar{u})$.

démonstration.

L'existence et l'unicité est maintenant classique.

D'après le corollaire (2.4), $\bar{u}$ est caractérisé par

$$\max_{v \in V(\bar{u})} < J'_u(\bar{u}, v), u - \bar{u} > \geq 0, \quad \forall u \in K,$$

ce qui équivaut à

(3.46) $\forall u \in K$, il existe $v_u \in V(\bar{u})$ tel que $< J'_u(\bar{u}, v_u), u - \bar{u} > \geq 0$.

Posons : $e_n = u_n - \bar{u}$

D'après (3.43),

$$e_{n+1} = P_K(u_n - \rho \Lambda^{-1} J'_u(u_n, v_n)) - \bar{u}$$

et comme $\bar{u} \in K$, $\bar{u} = P_K \bar{u}$ et d'après une propriété du projecteur,

$$\|e_{n+1}\|^2 \leq \|e_n\|^2 + \rho^2 \|J'_u(u_n, v_n)\|_*^2 - 2\rho < J'_u(u_n, v_n), e_n >$$

et a fortiori, d'après (3.46),

$$\|e_{n+1}\|^2 \leq \|e_n\|^2 + \rho^2 \|J'_u(u_n, v_n)\|_*^2 - 2\rho < J'_u(u_n, v_n) - J'_u(\bar{u}, v_{u_n}), e_n >$$

Puisque $J'_u(u, v)$ est uniformément borné et, d'après le lemme 3.1, on obtient finalement

(3.47) $\|e_{n+1}\|^2 \leq \|e_n\|^2 (1 - 4\rho\alpha) + \rho^2 C$, où $C > 0$,

d'où

$$\|e_{n+1}\|^2 \leq \|e_o\|^2 (1-4\rho\alpha)^{n+1} + \rho^2 C \sum_{\ell=1}^{n} (1 - 4\rho\alpha)^{\ell}$$

Si $0 < \rho < \frac{1}{4\alpha}$, on obtient

$$\|e_n\|^2 \leq \|e_o\|^2 (1 - 4\alpha\rho)^n + \frac{\rho C}{4\alpha},$$

de sorte, qu'en choisissant $0 < \rho < \min(\frac{1}{4\alpha}, \frac{2\alpha}{C} \varepsilon^2)$ puis n suffisamment gra on aura $\|e_n\| \leq \varepsilon$. La deuxième partie est immédiate d'après la continuité de ψ

Remarque 3.3.

Le théorème 3.5 s'applique à l'exemple 1.1 (cf. 3.4.2).

§ 4 - Approximation.

On étudie maintenant l'approximation du Pb 1, lorsque J est définie sur un produit d'espaces de Banach, par un problème analogue en dimension finie.

Les données sont les suivantes :

(4.1) U et W sont deux espaces de Banach réflexifs réels, K un sous-ensem

convexe fermé de U, V un sous-ensemble faiblement fermé borné de W et J une fonction numérique finie sur $K \times V$,

(4.2) $(u, v) \to J(u, v)$ est continue pour les topologies faibles de U et W,

(4.3) il existe $\tilde{v}$ de V et $\tilde{c} > 0$ tels que $\lim\limits_{\substack{\|u\| \to +\infty \\ \|v\| \leq \|\tilde{v}\| + \tilde{c}}} J(u, v) = +\infty$, hypothèse sans objet si K est borné,

(4.4) $\forall\, v \in V$, $u \to J(u, v)$ est strictement convexe.

Rappelons le problème "exact"

(4.5) $\sup\limits_{v \in V} J(\bar{u}, v) = \inf\limits_{u \in K} \sup\limits_{v \in V} J(u, v) \overset{\text{def}}{=} \bar{\delta}$, $\bar{u} \in K$.

Introduisons le problème approché.

On considère deux suites U_h et W_k d'espaces de dimensions finies où h et k parcourent des espaces d'indices de dimensions finies et sont destinés à tendre vers 0, ainsi que deux suites d'opérateurs linéaires continus (prolongements)

(4.6) $p_h \in \mathcal{L}(U_h, U)$ et $q_k \in \mathcal{L}(W_h, W)$, injectifs et stables ([2]).

On définit K_h et V_h, sous-ensembles respectifs de U_h et W_h, par

(4.7) $u_h \in K_h$ si et seulement si $p_h u_h \in K$,

(4.8) $v_k \in V_k$ si et seulement si $q_k v_k \in V$,

et on suppose

(4.9) $\forall\, u \in K$, il existe $r_h u \in K_h$ tel que $\lim\limits_{h \to o} p_h r_h u = u$ dans U fort,

(4.10) $\forall\, v \in V$, il existe $s_k v \in V_K$ tel que $\lim\limits_{k \to o} q_K s_K v = v$ dans W fort.

Le problème "approché" est alors le suivant

(4.11) $\sup\limits_{v_k \in V_k} J(p_h u_\varepsilon, q_k v_k) = \inf\limits_{u_h \in K_h} \sup\limits_{v_k \in V_k} J(p_h u_h, q_k v_k) \overset{\text{def}}{=} \bar{\delta}_\varepsilon$, $u_\varepsilon \in K_h$

où on a posé $\varepsilon = (h, k)$.

<u>Théorème 4.1.</u>

Sous les hypothèses (4.1) à (4.4) et (4.6) à (4.10),

(i) Les problèmes exact et approché admettent chacun une solution unique $\bar{u}$ et $\bar{u}_\varepsilon$, et les nombres $\bar{\delta}$ et $\bar{\delta}_\varepsilon$ sont finis,

(ii) $\lim_{\varepsilon \to o} p_h \bar{u}_\varepsilon = \bar{u}$ dans U faible et $\lim_{\varepsilon \to o} \bar{\delta}_\varepsilon = \bar{\delta}$.

démonstration.

(i) résulte du théorème 1.1 (ii) et des hypothèses sur p_h et q_k.

(ii) La suite $p_h \bar{u}_\varepsilon$ est bornée. En effet, posons

(4.12) $\psi_k(u) = \max_{v \in V_k} J(u, p_k v)$ et $\psi(u) = \max_{v \in V} J(u, v)$

ce qui est licite d'après la démonstration de (i). On a

(4.13) $\bar{\delta}_\varepsilon = \psi_k(p_h \bar{u}_\varepsilon) \geq J(p_h \bar{u}_\varepsilon, q_k s_k \tilde{v})$

et, d'après (4.10), pour ε suffisamment voisin de 0,

$$\|q_k s_k \tilde{v}\| \leq \|\tilde{v}\| + \tilde{c}.$$

Par conséquent, d'après (4.3), on aboutit à une contradiction si on suppose $p_h \bar{u}_\varepsilon$ non bornée. On peut donc extraire une sous-suite ε_i telle que $p_{h_i} \bar{u}_{\varepsilon_i}$ converge faiblement vers u^* et u^* est dans K.

Montrons maintenant que

(4.14) $p_h u_\varepsilon \to u$ faiblement implique : il existe une sous-suite ε_j telle que $\psi_{k_j}(p_{h_j} u_{\varepsilon_j}) \to \psi(u)$.

En effet,

(4.15) $\psi_k(p_h u_\varepsilon) = J(p_h u_\varepsilon, q_k v_\varepsilon) \geq J(p_h u_\varepsilon, q_k s_k v), \qquad \forall v \in V$

$q_k v_\varepsilon$ appartient au compact faible V. On peut donc extraire une sous-suite $q_{k_j} v_{\varepsilon_j}$ qui converge faiblement vers $\bar{v}$ de V et d'après (4.2) et (4.10) on peut passer à la limite dans (4.15) pour la sous-suite ε_j ce qui montre (4.14).

Appliquons (4.14) à la suite $p_{h_i} \bar{u}_{\varepsilon_i}$. Il existe donc une suite ε_{i_j} tel

(4.16) $\lim_{\varepsilon_{i_j} \to o} \psi_{k_{i_j}}(p_{h_{i_j}} \bar{u}_{\varepsilon_{i_j}}) = \psi(u^*)$

D[illegible] autre part,

(4.17) $\psi_k(p_h \bar{u}_\varepsilon) \leq \psi_k(p_h r_h \bar{u})$

En appliquant (4.14) à la suite $p_{h_{i_j}} r_{h_{i_j}} \bar{u}$, on trouve finalement une sous-suite ε_ℓ telle que

$$\bar{\delta} \leq \psi(u^*) = \lim_{\varepsilon_\ell \to o} \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} \bar{u}_{\varepsilon_\ell}) \leq \lim_{\varepsilon_\ell \to o} \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} r_{h_\ell} \bar{u}) = \psi(\bar{u}) = \bar{\delta}$$

ce qui montre que $u^* = \bar{u}$ à cause de l'unicité et donc que la suite entière

$p_h \bar{u}_\varepsilon$ converge faiblement vers $\bar{u}$, et que $\bar{\delta}$ est valeur d'adhérence de la suite $\bar{\delta}_\varepsilon = \psi_k(p_h \bar{u}_\varepsilon)$. Soit α une autre valeur d'adhérence. Il existe donc une sous-suite $\psi_{k_i}(p_{h_i} \bar{u}_{\varepsilon_i})$ qui converge vers α mais d'autre part d'après (4.14) cette suite admet $\psi(\bar{u})$ comme valeur d'adhérence, donc $\alpha = \bar{\delta}$.

Mais $\bar{\delta}_\varepsilon = J(p_h \bar{u}_\varepsilon, q_k \bar{v}_\varepsilon)$.
$p_h \bar{u}_\varepsilon$ est bornée et $q_k \bar{v}_\varepsilon$ est bornée puisque V l'est. Donc, d'après (4.2) $\bar{\delta}_\varepsilon$ est bornée et converge vers l'unique valeur d'adhérence $\bar{\delta}$.

Corollaire 4.1.

On conserve les mêmes hypothèses qu'au théorème 4.1 sauf (4.2), (4.3), (4.4) et on suppose

(4.18) $$J(u, v) = J_o(u, v) + J_1(u)$$

avec

(4.19) $(u, v) \to J_o(u, v)$ est continue sur $K \times V$ pour les topologies faibles de U et W,

(4.20) $u \to J_o(u, v)$ est, quel que soit $v \in V$, convexe ≥ 0,

(4.21) J_1 est strictement convexe, continue pour la topologie forte de U,

(4.22) $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J_1(u) = +\infty$.

On a alors les mêmes conclusions qu'au théorème 4.1.

démonstration.

(4.3) est vérifiée (avec $\tilde{v}$ et $\tilde{c}$ quelconques) ainsi que (4.4). Mais $(u, v) \to J(u, v)$ est continue pour la topologie forte de U et la topologie faible de W (et à fortiori la topologie forte de W). Le théorème 1.1 (ii) s'applique et (i) du théorème 4.1 subsiste.

(ii) Posons $\varphi(u) = \max\limits_{v \in V} J_o(u, v)$ et $\varphi_k(u) = \max\limits_{v \in V_k} J_o(u, q_k v)$

alors $\psi(u) = \varphi(u) + J_1(u)$ et $\psi_k(u) = \varphi_k(u) + J_1(u)$.

(4.14) est valable pour φ et φ_k et, compte-tenu de la semi-continuité inférieure faible de J_1, on obtient

(4.23) $p_h u_\varepsilon \to u$ faiblement implique : il existe une sous-suite ε_j telle que $\psi(u) \leq \liminf\limits_{\varepsilon_j \to o} \psi_{k_j}(p_{h_j} u_{\varepsilon_j})$.

On démontrerait d'une façon analogue à (4.14),

(4.24) $p_h u_\varepsilon \to u$ fortement implique : il existe une sous-suite ε_ℓ telle que

$$\lim_{\varepsilon_\ell} \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} u_{\varepsilon_\ell}) = \psi(u).$$

On démontrerait, comme au théorème 4.1 que $p_h \bar{u}_\varepsilon$ est borné. Il existe donc une sous-suite $p_{h_i} \bar{u}_{\varepsilon_i}$ qui converge vers u^* de K faiblement. Appliquant (4.23) à $p_{h_i} \bar{u}_{\varepsilon_i}$ puis (4.24) à $p_{h_{i_j}} r_{h_{i_j}} \bar{u}$, ε_{i_j} étant la sous-suite obtenue après application de (4.23), on obtient une sous-suite ε_ℓ telle que

$$\bar{\delta} \le \psi(u^*) \le \liminf \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} \bar{u}_{\varepsilon_\ell}) \le \limsup \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} \bar{u}_{\varepsilon_\ell}) \le \lim \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} r_{k_\ell} \bar{u}) = \psi(\bar{u})$$

Donc $\lim \psi_{k_\ell}(p_{h_\ell} \bar{u}_{\varepsilon_\ell}) = \psi(u^*) = \psi(\bar{u})$ et donc $u^* = \bar{u}$ et $p_h \bar{u}_\varepsilon \to \bar{u}$ faiblement. En fait on a montré que de toute suite extraite de $\bar{\delta}_\varepsilon$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers $\bar{\delta}$. Donc $\bar{\delta}$ est l'unique valeur d'adhérence de $\bar{\delta}_\varepsilon$. Or

(4.25) $J_1(p_h \bar{u}_\varepsilon) \le \bar{\delta}_\varepsilon = \psi_k(p_h \bar{u}_\varepsilon) \le \psi_k(p_h r_h \bar{u}) \le \psi(p_h r_h \bar{u})$.

La dernière inégalité (4.25) résulte de ce que $q_k V_k$ est contenu dans V quel que soit k. J_1 est s.c.i faible et $p_h \bar{u}_\varepsilon$ est bornée donc $J_1(p_h \bar{u}_\varepsilon)$ est minorée. ψ est continue et $p_h r_h \bar{u}$ tend fortement vers $\bar{u}$, donc $\psi(p_h r_h \bar{u})$ est borné. Par conséquent $\bar{\delta}_\varepsilon$ est bornée et donc converge vers $\bar{\delta}$.

Remarque 4.1.

Le corollaire 4.1 s'applique à l'exemple 1.1 si on suppose $\nu > o$ et que E est un opérateur compact. Mais ceci n'est pas réaliste car encore faut-il, pour aborder numériquement le problème, avoir aussi discrétisé E, F et N. Nous renvoyons au chapitre IV pour cela.

Chapitre III

JEUX DIFFERENTIELS DE SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES.

La théorie des jeux différentiels à deux joueurs et à somme nulle, inaugurée par ISAACS en 1954 ([29]), peut se définir, dans le cas déterministe, à partir des données suivantes

(1) deux contrôles v_1 et v_2 choisis dans des ensembles $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ (ensembles des contrôles admissibles),

(2) l'état $y(v_1, v_2)$ du système à contrôler, qui est donné pour v_1 et v_2 choisis, par la résolution de l'équation

$$\text{(e)} \qquad \Lambda\, y(v_1, v_2) = F(v_1, v_2)$$

où F est une fonction donnée et où Λ est l'opérateur qui représente le système à contrôler,

(3) l'observation $z(v_1, v_2)$ qui est une fonction de $y(v_1, v_2)$ et une partie (éventuellement réduite à un point) d'un espace Z. Par exemple, si (e) est une équation d'évolution, $z(v_1, v_2)$ peut être l'ensemble des états $y(t\,;\, v_1, v_2)$ lorsque t parcourt l'intervalle de temps,

(4) l'objectif M, sous ensemble de l'espace Z,

(5) le critère $J(v_1, v_2)$ défini à partir d'une fonction numérique $z \to \phi(z)$ par $J(v_1, v_2) = \phi(z(v_1, v_2))$.

On peut alors envisager deux catégories de problèmes.

(a) Problèmes en boucle fermée ("closed loop" ou "feed-back" en Anglais) :

Soit $\mathcal{L}_1$ (resp. $\mathcal{L}_2$) une application de l'espace des états dans $\mathcal{U}_1$(resp. $\mathcal{U}_2$). On pose $\mathcal{J}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = J(v_1, v_2)$ où y, v_1, v_2 sont liés par (e), $v_1 = \mathcal{L}_1 y$ et $v_2 = \mathcal{L}_2\, y$ ($\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont dites stratégies admissibles). On suppose qu'il existe un couple de stratégies admissibles $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ telles que $z(v_1, v_2) \cap M \neq \phi$ (accessibilité) ou, si Z est un espace métrique muni de la distance d, on pose $\mathcal{J}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = d(z(v_1, v_2), M) + J(v_1, v_2)$. On cherche, parmi tous les couples de stratégies admissibles,

$$\inf_{\mathcal{L}_1} \sup_{\mathcal{L}_2} \mathcal{J}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \quad \text{ou} \quad \sup_{\mathcal{L}_2} \inf_{\mathcal{L}_1} \mathcal{J}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \quad \text{ou les deux.}$$

(b) Problèmes en boucle ouverte ("open loop" en Anglais) :

Dans (a), on se limite aux stratégies "constantes", i.e, pour chaque

$v_1 \in \mathcal{U}_1$ (resp. $v_2 \in \mathcal{U}_2$) on pose $\mathcal{C}_1 y = v_1$ (resp. $\mathcal{C}_2 y = v_2$) quel que soit y dans l'espace des états.

Les problèmes ci-dessus ont surtout été étudiés dans le cas où (e) est un système d'équations différentielles ordinaires. Citons,
pour (a), [9], [10], [64], et, avec une notion différente de stratégie qui utilise une discrétisation du temps, [24], [25], [65],
pour (b), [26], [28], [30], [35], [36], [50].

L'objectif de ces travaux est l'obtention de conditions nécessaires (ou suffisantes) pour que le critère admette une valeur (inf sup = sup inf) ou un point de selle.

Dans [49] et [51], on s'intéresse essentiellement aux conditions suffisantes pour que l'hypothèse d'accessibilité soit vraie.

Lorsque Λ est un opérateur aux dérivées partielles, un problème du type (b) a été abordé par PORTER [50] et, dans le cas (a), une étude plus étoffée (qui considère également des modèles stochastiques) a été menée par BENSOUSSAN [6] pour des systèmes régis par des équations paraboliques.

Dans ce chapitre, nous étudions des jeux différentiels du type (b) où $J(v_1, v_2)$ est un critère quadratique, pour des systèmes décrits par des équations elliptiques (§ 1, 2, 3) et par des équations paraboliques (§ 4, 5, 6, 7). Au § 6, nous faisons le lien avec le travail de BENSOUSSAN [6]. Les méthodes et les résultats de LIONS [43] sont largement employés. Le § 8 traite de l'approximation des problèmes étudiés dans les paragraphes précédents.

---

§ 1 - Contrôle de problèmes variationnels elliptiques avec deux contrôles antagonistes.

1.1 - Position du problème.

On se place dans le même cadre que [43] chapitre 2.

Soient V et H deux espaces de Hilbert réel. On désigne par $\| \ \|$(resp.$| \ |$) la norme dans V (resp. H) et par $((\ , \ ))$ (resp.$(\ , \ )$) les produits scalaires correspondants. On suppose

(1.1) $V \subset H$ algébriquement et topologiquement, et V dense dans H, de sorte, qu'en identifiant H à son dual, on peut écrire

(1.2) $V \subset H \subset V'$ algébriquement et topologiquement, où V' = dual de V, chaque espace étant dense dans le suivant.

Soit

(1.3) $\begin{cases} a(\varphi, \psi) \text{ forme bilinéaire continue sur } V, \text{ coercive :} \\ a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|^2 , \quad \forall \varphi \in V \ , \ \alpha > 0. \end{cases}$

Soit enfin L un élément de V'. On note également $(\ , \ )$ la dualité entre V' et V.

On sait alors ([43]) , qu'il existe $y \in V$ unique tel que

(1.4) $$a(y, \psi) = (L, \psi) \qquad \forall \psi \in V \ .$$

La forme $a(\varphi, \psi)$ définit un opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V')$ par

(1.5) $$a(\varphi, \psi) = (A \varphi, \psi) \ ,$$

et (1.4) équivaut à

(1.6) $$Ay = L \ .$$

Le problème de contrôle envisagé est alors le suivant :

On se donne les espaces de Hilbert $\mathcal{U}_i$ des contrôles et des opérateurs

(1.7) $$B_i \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_i \ , V') \ , \qquad i = 1, 2.$$

On se donne un système gouverné par l'opérateur A. Pour chaque couple

$$(u_1, u_2) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \ ,$$

l'état du système est donné par y solution de

$$Ay = L + B_1 u_1 + B_2 u_2 \ , \qquad y \in V.$$

y dépend de u_1 et u_2 ; on écrira $y(u_1, u_2)$. Donc

(1.8) $$Ay(u_1, u_2) = L + B_1 u_1 + B_2 u_2 \ ,$$

ce qui définit $y(u_1, u_2)$ de façon unique.

On donne ensuite l'observation

$$(1.9) \qquad z(u_1, u_2) = Cy(u_1, u_2) ,$$

où $C \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

On se donne enfin

$$(1.10) \qquad \begin{cases} N_i \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_i), \ N_i \text{ symétrique vérifiant :} \\ (N_i\, u_i, u_i)_{\mathcal{U}_i} \geq \nu_i \|u_i\|^2 , \quad \nu_i \geq 0 , \ i = 1, 2. \end{cases}$$

A tous contrôles u_1, u_2, on associe le critère

$$(1.11) \quad J(u_1, u_2) = \|Cy(u_1, u_2) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + (N_1\, u_1, u_1) - (N_2\, u_2, u_2) ,$$

où z_d est donné dans $\mathcal{H}$.

Soit

$$(1.12) \qquad \mathcal{U}^i_{ad} = \text{convexe fermé de } \mathcal{U}_i , \qquad i = 1, 2.$$

ensembles des contrôles admissibles.

PROBLEME. - <u>Trouver</u> (u_1, u_2), <u>point de selle de</u> J <u>sur</u> $\mathcal{U}^1_{ad} \times \mathcal{U}^2_{ad}$.

1.2. <u>Résultats d'existence et d'unicité</u>. - D'après (1.8), l'application

$$(u_1, u_2) \to y(u_1, u_2)$$

est affine continue de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to V$. Il existe donc $G_i \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_i, V)$ tels que

$$(1.13) \qquad y(u_1, u_2) - y(0, 0) = G_1\, u_1 + G_2\, u_2, \quad \text{où } G_i\, u_i \text{ est solution de}$$

$$(1.14) \qquad Ay_i = B_i\, u_i , \ y_i \in V , \quad i = 1, 2.$$

Ecrivons $J(u_1, u_2)$ sous la forme

$$J(u_1, u_2) = \|C(y(u_1, u_2) - y(0, 0)) + Cy(0, 0) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + (N_1\, u_1, u_1) - (N_2\, u_2, u_2)$$

Posons

$$(1.15) \quad a_i(u_i, v_i) = \epsilon_i (CG_i\, u_i, CG_i\, v_i)_{\mathcal{H}} + (N_i\, u_i, v_i), \quad \epsilon_1 = 1 , \quad \epsilon_2 = -1 ,$$

$$(1.16) \qquad b(u_2, u_1) = (CG_2\, u_2, CG_1\, u_1)_{\mathcal{H}} ,$$

$$(1.17) \qquad L_i(v_i) = \epsilon_i (z_d - Cy(0, 0), CG_i\, u_i)_{\mathcal{H}}.$$

Les formes a_i et b son bilinéaires continues sur $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_1$ respectivement, et l'on a

$$(1.18) \quad J(u_1, u_2) = a_1(u_1, u_1) - a_2(u_2, u_2) + 2\{b(u_2, u_1) - L_1(u_1) + L_2(u_2)\} + \|Cy(0, 0) - z_d\|^2_{\mathcal{H}}.$$

$J(u_1, u_2)$ est donc, à une constante près qui n'intervient pas pour la recherche des points de selle, de la forme (1.1) du chapitre I. On est donc ramené à l'application des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3, du chapitre I, si toutefois on impose

$$(1.19) \qquad \nu_2 \geq \|CG_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})}.$$

En effet, puisque $\|CG_1\ v_1\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0$, on a, d'après (1.10),

$$a_1(v_1, v_1) \geq \nu_1 \|v_1\|^2 , \qquad \forall\ v_1 \in \mathcal{U}_1 .$$

D'autre part,

$$a_2(v_2, v_2) = (N_2\ v_2, v_2) - \|C\ G_2\ v_2\|^2_{\mathcal{H}} \geq (\nu_2 - \|C\ G_2\|^2)\|v_2\|^2 , \qquad \forall v_2 \in \mathcal{U}_2 .$$

Par conséquent, si (1.18) est vérifiée, alors $a_i(v_i, v_i)$ satisfont aux hypothèses du type (2.3) du chapitre I.

Or, d'après (1.3) (1.4) et (1.13) on a

$$\alpha\|y_2\|^2 \leq a(y_2, y_2) = (B_2\ u_2, y_2) \leq \|B_2\ u_2\|_{V'}\|y_2\|$$

et donc

$$(1.20) \qquad \|C\ G_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})} \leq (\|C\|_{\mathcal{L}(V, \mathcal{H})}\ \|B_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, V')})/\alpha \overset{\text{def}}{=} \sigma.$$

On a donc le résultat suivant :

<u>Théorème 1.1.</u>

Sous l'une des hypothèses suivantes, l'ensemble X des couples optimaux (points de selle de J) est non vide, et de la forme $X_1 \times X_2$ où X_i est un convexe fermé non vide de $\mathcal{U}_i$:

(i) $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > \sigma^2$,

(ii) $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \sigma^2$, $\mathcal{U}^2_{ad}$ borné, $i = 1, 2$,

(iii) $\nu_1 > 0$, $\nu_2 = \sigma^2$, $\mathcal{U}^2_{ad}$ borné,

(iv) $\nu_1 = 0$, $\mathcal{U}^1_{ad}$ borné, $\nu_2 > \sigma^2$,

De plus, dans le cas (i), X_i est réduit à un élément, $i = 1, 2$; dans le cas (iii) (resp (iv)) X_1 (resp. X_2) est réduit à un élément.

1.3. <u>Caractérisation des contrôles optimaux.</u> - Transposons ici les relations (1.3)-(1.4) du chapitre I. On obtient

$$(1.21) \quad (C(G_1\ u_1 + G_2\ u_2 + y(0, 0)) - z_d, CG_1(v_1 - u_1))_{\mathcal{H}} + (N_1\ u_1, v_1 - u_1) \geq 0,$$

$$(1.22) \quad (C(G_1\ u_1 + G_2\ u_2 + y(0, 0)) - z_d, CG_2(v_2 - u_2))_{\mathcal{H}} - (N_2\ u_2, v_2 - u_2) \leq 0.$$

Comme dans [43], introduisons $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', V')$ l'adjoint de C, Λ = isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$, et A^* = adjoint de A. (1.21) - (1.22) équivaut

(compte tenu de (1.13)) à

(1.23) $(C^* \Lambda(Cy(u_1, u_2) - z_d), y(v_1, u_2) - y(u_1, u_2)) + (N_1 u_1, v_1 - u_1) \geq 0,$

(1.24) $(C^* \Lambda(Cy(u_1, u_2) - z_d), y(u_1, v_2) - y(u_1, u_2)) - (N_2 u_2, v_2 - u_2) \leq 0.$

Pour un couple de contrôle (v_1, v_2), on définit l'état adjoint $p(v_1, v_2) \in V$ par

(1.25) $A^* p(v_1, v_2) = C^* \Lambda (Cy(v_1, v_2) - z_d).$

(1.23) - (1.24) équivaut alors à

(1.26) $(p(u_1, u_2), B_1(v_1 - u_1))_{VV'} + (N_1 u_1, v_1 - u_1) \geq 0,$

(1.27) $(p(u_1, u_2), B_2(v_2 - u_2))_{VV'} - (N_2 u_2, v_2 - u_2) \leq 0.$

Soient enfin $B_i^* \in \mathcal{L}(V, \mathcal{U}_i')$ l'adjoint de B_i, et Λ_i l'isomorphisme canonique de $\mathcal{U}_i$ sur $\mathcal{U}_i'$. (1.26)-(1.27) équivaut à

(1.28) $(B_1^* p(u_1, u_2) + \Lambda_1 N_1 u_1, v_1 - u_1)_{\mathcal{U}_1', \mathcal{U}_1} \geq 0, \qquad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1,$

(1.29) $(B_2^* p(u_1, u_2) - \Lambda_2 N_2 u_2, v_2 - u_2)_{\mathcal{U}_2', \mathcal{U}_2} \leq 0, \qquad \forall v_2 \in \mathcal{U}_{ad}^2.$

On peut donc énoncer le théorème ci-dessous.

THEOREME 1.2. - <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 1.1, <u>l'ensemble</u> X <u>est caractérisé par</u>

(1.30) $(B_1^* p(u_1, u_2) + \Lambda_1 N_1 u_1, u_1) = \inf_{v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1} (B_1^* p(u_1, u_2) + \Lambda_1 N_1 u_1, v_1),$

(1.31) $(B_2^* p(u_1, u_2) - \Lambda_2 N_2 u_2, u_2) = \sup_{v_2 \in \mathcal{U}_{ad}^2} (B_2^* p(u_1, u_2) - \Lambda_2 N_2 u_2, v_2).$

Remarque 1.1. - Si $\mathcal{U}_{ad}^1$ est un cône convexe fermé de sommet l'origine, on peut montrer, comme dans [43], que (1.30) équivaut à

(1.32) $$\begin{cases} u_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \\ (B_1^* p(u_1, u_2) + N_1 u_1, v_1)_{\mathcal{U}_1', \mathcal{U}_1} \geq 0, \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \\ (B_1^* p(u_1, u_2) + N_1 u_1, u_1) = 0. \end{cases}$$

Remarque analogue si $\mathcal{U}_{ad}^2$ est un cône convexe fermé de sommet l'origine de $\mathcal{U}_2$.

§ 2. <u>Premières applications. Observation distribuée.</u>

2.1. <u>Système gouverné par un problème de Dirichlet ; les deux contrôles sont distribués dans</u> Ω. - On prend $V = H_0^1(\Omega)$, et $H = L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière. A est l'opérateur elliptique du deuxième ordre,

(2.1) $$A\varphi = -\Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi\right) + a_0 \varphi,$$

défini par la forme $a(\varphi, \psi)$ vérifiant

(2.2) $$a(\varphi, \varphi) \geq \alpha\|\varphi\|^2 , \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) , \qquad \alpha > 0$$

(on reprend ici, avec les mêmes notations, le point 2.1 de [43], p. 55). On choisit

(2.3) $$\mathcal{U}_i = H \ (= L^2(\Omega)) \ , \text{ donc } \Lambda_i = \text{identité} ,$$

(2.4) $$B_i = \text{identité} ,$$

(2.5) $$\begin{cases} C = \text{injection de } V \text{ dans } H \ (\mathcal{H} = H, \text{ donc } \Lambda = \text{identité}) , \\ L \in V' \text{ définie par } L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx, \text{ où } f \text{ est donnée dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Donc l'état $y(u_1, u_2)$ est donné par la solution du problème de Dirichlet,

(2.6) $$\begin{cases} Ay(u_1, u_2) = f + u_1 + u_2 , \\ y(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega) , \end{cases}$$

et on cherche les points de selle de

(2.7) $$\int_\Omega |y(v_1, v_2) - z_d|^2 \, dx + (N_1 v_1, v_1) - (N_2 v_2, v_2)$$

sur $\mathcal{U}_{ad}^1 \times \mathcal{U}_{ad}^2$, où $\mathcal{U}_{ad}^i$ = convexe fermé de $\mathcal{U}^i$ $(= L^2(\Omega))$.

Voyons ce que devient la condition (1.19) dans la situation présente :

L'opérateur G_2 est défini par le problème de Dirichlet,

(2.8) $$(Az = u_2, \ z \in H_0^1(\Omega)) \Leftrightarrow (z = G_2 u_2) ,$$

compte tenu de (2.3), (2.5), on doit trouver une majoration de $\|G_2\|^2_{\mathcal{L}(H,H)}$. (2.8) équivaut à

(2.9) $$a(z, \varphi) = \int_\Omega u_2 \varphi \, dx , \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Faisons $\varphi = z$ dans (2.9).(2.2) et l'inégalité de Schwarz donnent

(2.10) $$\alpha|z|^2 \leq \alpha\|z\|^2 \leq a(z, z) = \int_\Omega u_2 z \, dx \leq |u_2| \ |z|.$$

D'où

(2.11) $$|G_2 u_2| \leq \frac{1}{\alpha} |u_2| ,$$

soit

(2.12) $$\|CG_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})} = \|G_2\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \frac{1}{\alpha} .$$

Par conséquent, (1.19) sera vérifiée si

$$\nu_2 \geq \frac{1}{\alpha^2} . \tag{2.13}$$

On peut alors appliquer les théorèmes 1.1 et 1.2. Sous l'hypothèse (par exemple)

$$\nu_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \nu_2 > \frac{1}{\alpha^2} ,$$

l'ensemble X des points de selle est non vide, et réduit à un élément caractérisé par

$$\left\{\begin{array}{l} Ay(u_1, u_2) = f + u_1 + u_2 \quad \text{dans } \Omega,\ y(u_1, u_2) = 0 \quad \text{sur } \Gamma , \\ A^* p(u_1, u_2) = y(u_1, u_2) - z_d \quad \text{dans } \Omega,\ p(u_1, u_2) = 0 \quad \text{sur } \Gamma , \\ \int_\Omega (p(u_1, u_2) + N_1 u_1)(v_1 - u_1)dx \geq 0 , \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad} , \\ \int_\Omega (p(u_1, u_2) - N_2 u_2)(v_2 - u_2)dx \leq 0 , \quad \forall v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad} , \\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^1_{ad} \times \mathcal{U}^2_{ad} . \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Exemple 2.1. - Cas sans contrainte : $\mathcal{U}^i_{ad} = \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$. Les deux dernières conditions se réduisent à

$$p(u_1, u_2) + N_1 u_1 = 0 ,$$
$$p(u_1, u_2) - N_2 u_2 = 0 .$$

On peut donc éliminer u_1, u_2, et les contrôles optimaux sont donnés par la règle suivante :

(i) On résout le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{l} Ay + N_1^{-1} p - N_2^{-1} p = f \quad \text{dans } \Omega, \\ A^* p - y = - z_d \quad \text{dans } \Omega , \\ y = 0,\ p = 0 \quad \text{sur } \Gamma ; \end{array}\right. \tag{2.15}$$

(ii) Alors

$$\begin{array}{l} u_1 = - N_1^{-1} p , \\ u_2 = N_2^{-1} p . \end{array} \tag{2.16}$$

Cas particulier : $N_1 = N_2 = N$. Les contrôles optimaux sont donnés par la règle suivante :

(i) On résout

$$\begin{cases} Ay = f & \text{dans } \Omega , \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma ; \end{cases}$$

(ii) On résout

$$\begin{cases} A^* p - y = - z_d & \text{dans } \Omega , \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma ; \end{cases}$$

(iii) Alors

$$u_1 = - u_2 = - N^{-1} p.$$

La "valeur" du critère est alors

$$J(u_1, u_2) = \int_\Omega |y - z_d|^2 \, dx ,$$

et peut être obtenue sans calculer les contrôles optimaux.

<u>Exemple</u> 2.2. - Prenons maintenant

$$(2.17) \qquad \mathcal{U}^i_{ad} = \{v_i | v_i \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} , \qquad i = 1, 2.$$

D'après la remarque 1.1, on obtient

$$(2.18) \qquad \begin{cases} u_1 \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \ u_2 \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega , \\ p(u_1, u_2) + N_1 u_1 \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \ p(u_1, u_2) - N_2 u_2 \leq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_1(p(u_1, u_2) + N_1 u_1) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \ u_2(p(u_1, u_2) - N_2 u_2) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On peut éliminer un des deux contrôles, par exemple u_1, de la façon suivante :

$$(2.19) \qquad \begin{cases} Ay - f - u_2 \geq 0 & \text{dans } \Omega , \\ A^* p - y = - z_d & \text{dans } \Omega , \\ p + N_1(Ay - f - u_2) \geq 0 & \text{dans } \Omega , \\ (Ay - f - u_2)\,(p + N_1(Ay - f - u_2)) = 0 & \text{dans } \Omega , \\ u_2 \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ p - N_2 u_2 \leq 0 & \text{dans } \Omega , \\ u_2(p - N_2 u_2) = 0 & \text{dans } \Omega , \\ y = 0, \ p = 0 & \text{sur } \Gamma , \end{cases}$$

et alors $u_1 = Ay - f - u_2$.

On verra, en 2.4, comment on peut éliminer les deux contrôles lorsque $N_i = \nu_i I$ (I = identité).

<u>Exemple</u> 2.3. - $\mathcal{U}^1_{ad} = \mathcal{U}_1 (= L^2(\Omega))$; $\mathcal{U}^2_{ad}$ comme en (2.17). Les contrôles optimaux s'obtiennent comme suit.

On résout

$$(2.20)\qquad \begin{cases} Ay + N_1^{-1}\, p - f \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ A^*\, p - y = -\, z_d \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ p - N_2(Ay + N_1^{-1}\, p - f) \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ (Ay + N_1^{-1}\, p - f)(p - N_2(Ay + N_1^{-1}\, p - f)) = 0 \quad \text{dan} \quad \Omega\,, \\ y = 0,\ p = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \end{cases}$$

alors $u_1 = -\, N^{-1}\, p$, et $u_2 = Ay + u_1 - f$.

2.2. <u>Problème de Dirichlet. Variante.</u> - Supposons que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ (cf. fig.1

On choisit

$$\mathcal{U}_i = L^2(\Omega_i)\,, \qquad \Lambda_i = \text{identité},$$

$$B_i\, u_i = \begin{cases} u_i & \text{dans} \quad \Omega_i\,, \\ 0 & \text{dans} \quad \Omega_{3-i}\,, \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega_2), \qquad \Lambda = \text{identité}.$$

On observe donc, dans Ω_2,

$$z(u_1, u_2) = M\, y(u_1, u_2)$$

M = fonction caractéristique de Ω_2.

L'état est donc donné par la solution du problème

$$(2.21)\qquad \begin{cases} Ay(u_1, u_2) = f + u_1 \quad \text{dans} \quad \Omega_1\,, \\ Ay(u_1, u_2) = f + u_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_2\,, \\ y(u_1, u_2) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Le critère est

$$(2.22)\qquad J(v_1, v_2) = \int_{\Omega_2} |y(v_1, v_2) - z_d|^2\, dx + (N_1\, v_1, v_1) - (N_2\, v_2, v_2)\,,$$

avec z_d donné dans $L^2(\Omega_2)$.

G_2 est défini par le problème

$$(2.23)\qquad \begin{cases} Az = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1\,, \\ Az = u_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_2\,, \\ z = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\,, \end{cases}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$a(z, \varphi) = \int_{\Omega_2} u_2 \, \varphi \, dx \, , \qquad \forall \, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

D'où l'on déduit

$$\alpha |z|_2^2 \leq \alpha |z|^2 \leq \alpha \|z\|^2 \leq a(z, z) = \int_{\Omega_2} u_2 \, z \leq |u_2|_2 \, |z|_2 \, ,$$

où $|.|_i$ désigne la norme de $L^2(\Omega_i)$.

On a donc encore la majoration (2.12), et la condition (2.13) est encore suffisante pour que (1.19) ait lieu. En appliquant les théorèmes 1.1 et 1.2, sous l'hypothèse

$$\nu_1 > 0 \quad \text{et} \quad \nu_2 > \frac{1}{\alpha^2} \, ,$$

on obtient les équations qui caractérisent le couple des contrôles optimaux :

$$(2.24) \qquad \begin{cases} Ay(u_1, u_2) = f + u_1 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \, , \\ Ay(u_1, u_2) = f + u_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \, , \\ A^* \, p(u_1, u_2) = y(u_1, u_2) \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \, , \\ A^* \, p(u_1, u_2) = y(u_1, u_2) - z_d \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \, , \\ y(u_1, u_2) = 0, \; p(u_1, u_2) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \, , \\ \displaystyle\int_{\Omega_1} (p(u_1, u_2) + N_1 \, u_1)(v_1 - u_1) \, dx \geq 0 \, , \qquad \forall \, v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1 \, , \\ \displaystyle\int_{\Omega_2} (p(u_1, u_2) - N_2 \, u_2)(v_2 - u_2) dx \leq 0 \, , \qquad \forall \, v_2 \in \mathcal{U}_{ad}^2 \, , \\ u_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \; u_2 \in \mathcal{U}_{ad}^2. \end{cases}$$

<u>Exemple</u> 2.4. - On peut reprendre les choix de $\mathcal{U}_{ad}^i$ comme en 2.1. Par exemple, $\mathcal{U}_{ad}^i = \mathcal{U}_{ad}$ donne

$$(2.25) \qquad \begin{cases} Ay + N_1^{-1} p_1 = f \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \, , \\ Ay - N_2^{-1} \, p_2 = f \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \, , \\ A^* \, p - y = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \, , \\ A^* \, p - y = - z_d \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \, , \\ y = 0, \; p = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \, , \\ u_1 = - N_1^{-1} \, p_1 \, , \; u_2 = N_2^{-1} \, p_2 \, , \end{cases}$$

où p_i désigne la restriction de p à Ω_i.

2.3. <u>Système gouverné par un problème de Neumann</u>. - Nous prenons $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$. L'opérateur A est défini comme en 2.1. Pour un même type d'observation, on peut considérer plusieurs variantes suivant la nature des contrôles

(distribués, frontières). Nous nous plaçons dans la situation suivante :

$$\mathcal{U}_1 = L^2(\Gamma) , \qquad \Lambda_1 = \text{identité} ,$$

B_1 défini par $B_1 u_1(\varphi) = \int_\Gamma u_1 \varphi \, d\Gamma$,

$$\mathcal{U}_2 = L^2(\Omega) , \qquad \Lambda_2 = \text{identité}, \quad B_2 = \text{identité} ,$$

C = injection de V dans H.

Choisissons L par

$$(2.26) \qquad (L, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx + \int_\Gamma g\varphi \, d\Gamma , \qquad f \in L^2(\Omega) , \qquad g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

L'état $y(u_1, u_2)$ est alors donné par la solution de

$$(2.27) \qquad \begin{cases} Ay(u_1, u_2) = f + u_2 & \text{dans } \Omega , \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = g + u_1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le critère est donné comme en (2.7).

L'opérateur G_2 est défini par le problème

$$(2.28) \qquad \begin{cases} Az = u_2 , \\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu_A} = 0 , \end{cases}$$

c'est-à-dire $a(z, \varphi) = \int_\Omega u_2 \varphi \, dx, \ \forall \varphi \in H^1(\Omega)$. D'où l'on déduit

$$\|CG_2\| \leq \frac{1}{\alpha} .$$

Donc, si $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > \frac{1}{\alpha^2}$, le couple optimal (u_1, u_2) existe et est unique, et est donné par la résolution de

$$(2.29) \qquad \begin{cases} Ay(u_1, u_2) = f + u_2 \text{ dans } \Omega, \ A^* p(u_1, u_2) = y(u_1, u_2) - z_d \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = g + u_1 \text{ sur } \Gamma , \ \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}(u_1, u_2) = 0 \text{ sur } \Gamma , \\ \int_\Gamma (p(u_1, u_2) + N_1 u_1)(v_1 - u_1) d\Gamma \geq 0, \ \forall v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad}, \ u_1 \in \mathcal{U}^1_{ad}, \\ \int_\Omega (p(u_1, u_2) - N_2 u_2)(v_2 - u_2) dx \leq 0, \ \forall v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}, \ u_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}. \end{cases}$$

<u>Exemple</u> 2.5. - Prenons

$$\mathcal{U}^1_{ad} = \{v_1 | v_1 \in L^2(\Gamma) , \ v_1 \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\} ,$$

$$\mathcal{U}^2_{ad} = \mathcal{U}_2 \ (= L^2(\Omega)).$$

On peut alors éliminer u_1 et u_2. La règle est la suivante :

On résout

$$Ay - N_2^{-1} p = f \text{ dans } \Omega , \qquad A^* p - y = - z_d \text{ dans } \Omega ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - g \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ , \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ ,$$

$$p|_\Gamma + N_1(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g) \geq 0 \ , \quad (\frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g)(p|_\Gamma + N_1(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g)) = 0 \ ,$$

alors

$$u_1 = \frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g \ , \quad u_2 = N_2^{-1} \ p.$$

<u>Exemple</u> 2.6.

$$\mathcal{U}^1_{ad} = \{v_1 | v_1 \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\} \ , \quad \mathcal{U}^2_{ad} = \{v_2 | v_2 \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\}.$$

On résout

$$Ay - f \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad A^* \ p - y = -z_d \quad \text{dans} \quad \Omega \ ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - g \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ , \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ ,$$

$$p|_\Gamma + N_1(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g) \geq 0 \ , \quad p - N_2(Ay - f) \leq 0 \ ,$$

$$(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g)(p|_\Gamma + N_1(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g)) = 0 \ , \quad (Ay - f)(p - N_2(Ay - f)) = 0 \ ,$$

et les contrôles optimaux sont donnés par

$$u_1 = \frac{\partial y}{\partial \nu_A}|_\Gamma - g \ , \quad u_2 = Ay - f.$$

2.4. <u>Le cas</u> $N_i = \nu_i \ I$. Les conditions (1.28)-(1.29) s'écrivent

$$(2.30) \quad \begin{cases} (\Lambda_1^{-1} \ B_1^* \ p(u_1, u_2) + \nu_1 \ u_1, \ v_1 - u_1)_{\mathcal{U}_1} \geq 0 \ , & \forall \ v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad} \ , \\ (\Lambda_2^{-1} \ B_2^* \ p(u_2, u_2) - \nu_2 \ u_2, \ v_2 - u_2)_{\mathcal{U}_2} \geq 0 \ , & \forall \ v_2 \in \mathcal{U}^1_{ad} \ , \end{cases}$$

ce qui équivaut, d'après les propriétés de l'opérateur de projection (désigné ici par P_i) sur le convexe fermé $\mathcal{U}^i_{ad}$, et si $\nu_k > 0$, $k = 1, 2$, à

$$(2.31) \quad \begin{cases} u_1 = P_1(-\frac{1}{\nu_1} \Lambda_1^{-1} \ B_1^* \ p(u_1, u_2)) \ , \\ u_2 = P_2(\frac{1}{\nu_2} \ \Lambda_2^{-1} \ B_2^* \ p(u_1, u_2)). \end{cases}$$

Reprenons l'exemple 2.2. Les contrôles optimaux sont alors donnés par

$$u_1 = (-\frac{p}{\nu_1})^+ = \frac{p^-}{\nu_1} \ , \qquad u_2 = \frac{p^+}{\nu_2} \ ,$$

où

$$\xi^+(x) = \begin{cases} \xi(x) \ , \ \text{si} \ \ \xi(x) \geq 0 \ , \\ 0, \ \text{si} \ \ \xi(x) < 0 \end{cases} \qquad \xi^-(x) = \begin{cases} 0, \ \text{si} \ \ \xi(x) > 0 \ , \\ -\xi(x) \ , \ \text{si} \ \ \xi(x) \leq 0 \ , \end{cases}$$

(y, p) étant solution du problème non linéaire

$$(2.32)\qquad \begin{cases} Ay - \dfrac{p^-}{\nu_1} - \dfrac{p^+}{\nu_2} = f \quad \text{dans } \Omega , \\[2ex] A^* p - y = - z_d \quad \text{dans } \Omega , \\[2ex] y = 0,\ p = 0 \quad \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Reprenons l'exemple 2.6. Les contrôles optimaux sont donnés par

$$u_1 = \frac{p^-}{\nu_1}\Big|_\Gamma \quad , \qquad u_2 = \frac{p^+}{\nu_2}$$

(y, p) étant solution de

$$(2.33)\qquad \begin{cases} Ay - \dfrac{p^+}{\nu_2} = f \quad \text{dans } \Omega , \\[2ex] A^* p - y = - z_d \quad \text{dans } \Omega, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - \dfrac{p^-}{\nu_1} = g \ , \quad \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \ , \ \text{sur } \Gamma \ . \end{cases}$$

<u>Remarque 2.1.</u> On peut aussi éliminer un des deux contrôles, par exemple u_1, dans l'équation d'état, ce qui conduit à un problème de contrôle optimal (non linéaire si $\mathcal{U}^1_{ad} \neq \mathcal{U}_1$) par rapport à u_2 où l'état est le couple (y, p) ; u_1 est ensuite donné par (2.31).

§ 3 Observation frontière.

3.1. Système gouverné par un problème de Neumann.

Nous prenons la situation du point 2.3. L'état est donc donné par

$$(3.1)\qquad \begin{cases} Ay(v_1, v_2) = f + u_2 \quad \text{dans } \Omega,\ f,\ v_2 \in L^2(\Omega), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}(v_1, v_2) = g + u_1 \quad \text{sur } \Gamma,\ g,\ v_1 \in L^2(\Gamma), \end{cases}$$

$y(v_1, v_2) \in H^1(\Omega)$. Donc $y(v_1, v_2)|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et si $M \in L^\infty(\Gamma)$, on peut considérer le critère, z_d étant donné dans $L^2(\Gamma)$,

$$(3.2)\qquad J(v_1, v_2) = \int_\Gamma |My(v_1, v_2) - z_d|^2 \, d\Gamma + (N_1 v_1, v_1) - (N_2 v_2, v_2),$$

où $c : y \to My|_\Gamma$.

L'application $y \to y|_\Gamma$ étant linéaire continue de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe une constante $\gamma_o > 0$ telle que

$$\|c\| \leq \gamma_o \sup_\Gamma \text{ess } |M|$$

Comme en 2.3, on obtient $\|G_2\| \leq \frac{1}{\alpha}$ et donc l'existence et l'unicité du couple optimal, si $\nu_1 > o$ et $\nu_2 > (\gamma_o \sup_\Gamma \text{ess } |M|/\alpha)^2$.

L'état adjoint est alors défini par

$$(3.3)\qquad \begin{cases} A^* p(u_1, u_2) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = M(My(u_1, u_2) - z_d) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les contrôles optimaux sont donnés comme en 2.3 (résolution de (2.29)) sauf pour l'état adjoint, donné par (3.3).

3.2. <u>Système gouverné par un problème de Dirichlet. Contrôles distribués.</u>

On reprend la situation étudiée en 2.1. L'état est donné par

$$(3.4)\qquad \begin{cases} Ay(v_1, v_2) = f + v_1 + v_2 & \text{dans } \Omega,\ f,\ v_1,\ v_2 \in L^2(\Omega), \\ y(v_1, v_2) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Si on suppose les coefficients de A assez réguliers pour que $y \in H^2(\Omega)$, on peut définie $\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} \in L^2(\Gamma)$ (en fait, $\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, [45]) et

$$(3.5)\qquad \left\|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right\|_{L^2(\Gamma)} \le \gamma_1 \|y\|_{H^2(\Omega)}, \quad \gamma_1 > 0.$$

On prend donc le critère

$$(3.6)\qquad J(v_1, v_2) = \left\|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(v_1, v_2) - z_d\right\|^2_{L^2(\Gamma)} + (N_1 v_1, v_1) - (N_2 v_2, v_2)$$

où z_d est donné <u>dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$</u> (cf. remarque 3.1 ci-après). Donc $\mathcal{H} = L^2(\Gamma)$. Comme A est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, on peut prendre en fait, $V = H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ et C est alors l'application trace $y \to \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}$. Donc $\|C\| \le \gamma_1$ et $G_2 = A^{-1}$. Par conséquent si $\nu_2 \ge \gamma_1^2 \|A^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))}$, la condition (1.19) sera vérifiée, et si $\nu_1 > o$ et $\nu_2 > \gamma_1^2 \|A^{-1}\|^2$, le couple optimal existe et est unique, et est caractérisé par

$$(3.7)\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2) - z_d, \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(v_1, u_2) - \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2)\right)_{L^2(\Gamma)} + (N_1 v_1, v_1 - u_1) \ge 0, \quad \forall\, v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad},$$

$$(3.8)\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2) - z_d, \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, v_2) - \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2)\right)_{L^2(\Gamma)} - (N_2 u_2, v_2 - u_2) \le o, \quad \forall\, v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}.$$

données par (1.16), (1.17).

L'état adjoint est la solution unique, dans $H^1(\Omega)$, de

$$(3.9)\qquad \begin{cases} A^* p(u_1, u_2) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ p(u_1, u_2) = -\left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - z_d\right) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Remarquons que (3.9) définit $p(u_1, u_2) \in H^1(\Omega)$ comme la solution de

$$(3.10) \qquad a(\varphi, p - \xi) = - a(\varphi, \xi), \quad \forall \varphi \in H^1_o(\Omega), \quad p - \xi \in H^1_o(\Omega)$$

où $\xi \in H^1(\Omega)$ est un relèvement de $z_d - \frac{\partial y}{\partial \nu_A} (\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Soit alors $\varphi \in H^2(\Omega)$. Multiplions la première équation (3.9) par φ et appliquons la formule de Green (ou plutôt la définition de $\frac{\partial p}{\partial \nu_{A*}} \in H^{-3/2}(\Gamma)$) :

$$(3.12) \quad 0 = \int_\Omega A^* p(u_1, u_2)\varphi \, dx = - \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial \nu_{A*}}(u_1, u_2)\varphi \, d\Gamma + \int_\Gamma p(u_1, u_2) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu A} \, d\Gamma + \int_\Omega p(u_1, u_2) A\varphi \, dx.$$

Prenons successivement dans (3.12)

$$\varphi = y(v_1, u_2) - y(u_1, u_2) ,$$

$$\varphi = y(u_1, v_2) - y(u_1, u_2).$$

On obtient, compte tenu des deuxièmes conditions (3.4) et (3.9),

$$(3.13) \quad \int_\Omega p(u_1, u_2)(Ay(v_1, u_2) - Ay(u_1, u_2))dx = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2) - z_d, \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(v_1, u_2) - \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2)\right)_{L^2(\Gamma)},$$

$$(3.14) \quad \int_\Omega p(u_1, u_2)(Ay(u_1, v_2) - Ay(u_1, u_2))dx = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2) - z_d, \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, v_2) - \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(u_1, u_2)\right)_{L^2(\Gamma)}$$

ce qui, joint à (3.7)-(3.8), et compte tenu de la première équation (3.4), donne finalement

$$(3.15) \quad \begin{cases} \int_\Omega p(u_1, u_2)(v_1 - u_1)dx + (N_1 v_1, v_1 - u_1) \geq 0 , & \forall v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad} , \\ \int_\Omega p(u_1, u_2)(v_2 - u_2)dx - (N_2 u_2, v_2 - u_2) \leq 0 , & \forall v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}. \end{cases}$$

Le couple optimal est donc donné par la solution de

$$(3.16) \quad \begin{cases} Ay = f + u_1 + u_2 \text{ dans } \Omega , \quad A^*p = 0 \text{ dans } \Omega \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma , \quad p = z_d - \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \text{ sur } \Gamma \\ \int_\Omega (p + N_1 u_1)(v_1 - u_1)dx \geq 0 , \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad} , u_1 \in \mathcal{U}^1_{ad} , \\ \int_\Omega (p - N_2 u_2)(v_2 - u_2)dx \leq 0 , \quad \forall v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad} , u_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}. \end{cases}$$

<u>Remarque 3.1.</u>

La donnée de z_d dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un peu restrictive puisqu'on observe dans $L^2(\Gamma)$. Si $z_d \in L^2(\Gamma)$, le résultat (3.16) subsiste mais $p(u_1, u_2)$ doi

être défini par transposition (cf. [43] chap. 2, points 4.2 et 4.3).

§ 4 - Contrôle de systèmes gouvernés par une équation différentielle opérationnelle du premier ordre avec deux contrôles antagonistes.

4.1 - Position du problème.

On se donne les espaces de Hilbert V et H comme au point 1, et avec les mêmes notations : V' dual de V, H' identifié à H et donc

$$V \subset H \subset V'.$$

La variable t désigne le temps. On suppose que $t \in]0, T[$, T fixé fini.

On se donne une famille de formes bilinéaires continues sur V

$$\varphi, \psi \to a(t ; \varphi, \psi) , \qquad \forall\, t \in]0, T[.$$

On suppose

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \forall\, \varphi, \psi \in V , \ t \to a(t ; \varphi, \psi) \text{ mesurable sur }]0, T[\text{ et} \\ |a(t ; \varphi, \psi)| \leq C\|\varphi\| \, \|\psi\| , \end{cases}$$

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \text{il existe } \lambda \text{ tel que} \\ a(t ; \varphi, \varphi) + \lambda|\varphi|^2 \geq \alpha\|\varphi\|^2 , \quad \alpha > 0 , \quad \forall\, \varphi \in V, \ t \in]0, T[. \end{cases}$$

On peut alors définir une famille d'opérateurs (cf. [44]),

$$A(t) \in \mathcal{L}(L^2(0, T ; V) , L^2(0, T ; V'))$$

par

$$(4.3) \qquad a(t ; \varphi, \psi) = (A(t)\varphi, \psi) , \quad t \in]0, T[,$$

la parenthèse désignant la dualité entre V' et V.

On désigne maintenant par $\mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$ les espaces de Hilbert réels des contrôles et on se donne

$$(4.4) \qquad B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, L^2(0, T ; V') , \quad k = 1, 2.$$

Soient $\mathcal{F}$ et y_o donnés, $\mathcal{F} \in L^2(0, T ; V')$, $y_o \in H$.

On désigne par $y(v_1, v_2)$ la solution qui existe et est unique sous les hypothèses (4.1)-(4.2) ([43], [44]) de

$$(4.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)y = \mathcal{F} + B_1 v_1 + B_2 v_2 , \\ y(0) = y_o , \\ y \in L^2(0, T ; V) , \end{cases}$$

où $\frac{dy}{dt}$ = dérivée au sens des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans V. $y(v_1, v_2)$ (ou $y(t ; v_1, v_2)$ ou $y(x, t ; v_1, v_2)$ dans les applications) est l'état du système gouverné par le problème (4.5).

On définit l'observation par

$$\mathcal{C} \in \mathcal{L}(W(0, T) ; \tilde{\mathcal{H}}) \tag{4.6}$$

où $\tilde{\mathcal{H}}$ est un espace de Hilbert réel, espace des observations et

$$W(0, T) = \{\varphi/\varphi \in L^2(0, T ; V), \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T ; V')\},$$

espace auquel appartient en fait $y(v_1, v_2)$ ([44]).

Soit alors le critère

$$J(v_1, v_2) = \| \mathcal{C} y(v_1, v_2) - z_d \|^2_{\tilde{\mathcal{H}}} + (N_1 v_1, v_1) - (N_2 v_2, v_2) \tag{4.7}$$

où

$$\begin{cases} N_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_k) \text{ avec } (N_k v_k, v_k)_k \geq \nu_k \|v_k\|^2_k , \quad \nu_k \geq 0 \\ \text{et } N_k \text{ symétrique, } k = 1, 2 \end{cases} \tag{4.8}$$

et z_d donné dans $\tilde{\mathcal{H}}$.

On se donne ensuite comme, au point 1,

$\mathcal{U}^k_{ad}$ = ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}_k$

et on cherche (u_1, u_2) point de selle de J sur $\mathcal{U}^1_{ad} \times \mathcal{U}^2_{ad}$.

4.2 - <u>Résultats d'existence et d'unicité.</u>

L'application $(v_1, v_2) \to y(v_1, v_2)$ est affine continue de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to W(0, T)$ car la solution de (4.5) dépend continûment des données ([44]). Il existe donc $G_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, W(0, T))$ et $\zeta \in W(0, T)$ tels que

$$y(v_1, v_2) = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \zeta \tag{4.9}$$

où G_k est défini par $y_k = G_k v_k$, y_k solution de

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dt} + A(t) y_k = B_k v_k , \\ y_k(0) = 0 , \\ y_k \in L^2(0, T ; V) , \end{cases} \tag{4.10}$$

et où ζ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} + A(t)\zeta = \mathcal{F} , \\ \zeta(0) = y_o , \\ \zeta \in L^2(0, T ; V) . \end{cases} \tag{4.11}$$

Le critère (4.7) s'écrit alors

(4.12) $$J(v_1, v_2) = \|E_1 v_1 + E_2 v_2 + \xi\|^2_{\tilde{\mathcal{K}}} + (N_1 v_1, v_1) - (N_2 v_2, v_2)$$

où

(4.13) $$E_k = \mathcal{C} G_k \quad , \qquad \xi = \mathcal{C}\zeta - z_d \, .$$

On est donc ramené, comme au point 1, à l'application des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 du chapitre I, si on suppose

(4.14) $$\nu_2 \geq \|\mathcal{C} G_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \tilde{\mathcal{K}})} \, .$$

Le problème est maintenant de trouver, comme au point 1, une condition suffisante sur les données pour que (4.14) ait lieu. Nous considérons pour cela la situation suivante :

Soit $\mathcal{K}$ un espace de Hilbert réel, $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T ; V), \mathcal{K})$, $D \in \mathcal{L}(H, H)$ et β, γ deux constantes ≥ 0 avec $\beta + \gamma > 0$. On pose $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times H$ et on définit $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{C} : y \to (\sqrt{\beta}\, C\, y, \sqrt{\gamma}\, D\, y(T)) \, .$$

$y(T)$ a bien un sens pour $y \in W(0, T)$ car on montre ([45])

(4.15) $W(0, T) \subset \mathcal{C}^0([0, T] ; H)$ = espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans H, l'inclusion étant topologique.

On pose $z_{d_1} = (\sqrt{\beta}\, z_{d_1}, \sqrt{\gamma}\, z_{d_2})$ où $z_{d_1} \in \mathcal{K}$, $z_{d_2} \in H$.
Alors, (4.6) a lieu et le critère (4.7) s'écrit

(4.16) $$J(v_1, v_2) = \beta\|Cy(v_1, v_2) - z_{d_1}\|^2_{\mathcal{K}} + \gamma|Dy(T ; v_1, v_2) - z_{d_2}|^2_H + \\ + (N_1 v_1, v_1) - (N_2 v_2, v_2) \, .$$

Comme on peut avoir "$\beta = 1$ et $\gamma = 0$" ou "$\beta = 0$ et $\gamma = 1$", ceci permet de traiter en même temps une observation globale sur $]0, T[$ et une observation finale.

Nous avons alors le résultat suivant.

<u>Proposition 4.1.</u>

On pose

(4.17) $$\sigma^2 = \|\beta_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, L^2(0,T ; V'))} \left(\frac{\beta}{\alpha} \|C\|^2_{\mathcal{L}(L^2(0,T ; V),\mathcal{K})} + \frac{\gamma}{\alpha} e^{2\lambda T} \|D\|^2_{\mathcal{L}(H,H)}\right)$$

où λ est la constante qui intervient dans (4.2). Alors

(4.18) $$\|\mathcal{C}\, G_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \tilde{\mathcal{K}})} \leq \sigma^2 \, .$$

démonstration.

Si on pose

$$y_2 = e^{\lambda t} z_2 , \tag{4.19}$$

le problème (4.10) avec $k = 2$, équivaut à

$$\begin{cases} \dfrac{dz_2}{dt} + (A(t) + \lambda I)z_2 = e^{-\lambda t} B_2 v_2 \\ z_2(0) = 0 \\ z_2 \in L^2(0, T ; V) \end{cases} \tag{4.20}$$

soit, sous la forme équivalente

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} (z_2, \varphi) + a(t ; z_2, \varphi) + \lambda(z_2, \varphi) = e^{-\lambda t}(B_2 v_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in V \\ z_2(0) = 0 . \end{cases} \tag{4.21}$$

Dans (4.21) faisant $\varphi = z_2$ et intégrant sur $[0, T]$, compte-tenu de (4.2
on obtient

$$|z_2(T)|^2 + 2\alpha \int_0^T \|z_2(t)\|^2 dt \le 2 \int_0^T e^{-\lambda t}|((B_2 v_2)(t), z_2(t))|dt \le$$

$$\le 2 \int_0^T e^{-\lambda t}\|(B_2 v_2)(t)\|_{V'} \|z_2(t)\|dt \le \alpha \int_0^T \|z_2(t)\|^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int_0^T e^{-2\lambda t}\|(B_2 v_2)(t)\|^2_{V'} dt$$

d'où l'on tire

$$\int_0^T \|z_2(t)\|^2 dt \le \frac{1}{\alpha^2} \int_0^T e^{-2\lambda t}\|(B_2 v_2)(t)\|^2_{V'} dt \tag{4.22}$$

$$|z_2(T)|^2 \le \frac{1}{\alpha} \int_0^T e^{-2\lambda t} \|(B_2 v_2)(t)\|^2_{V'} dt . \tag{4.23}$$

On peut toujours supposer $\lambda \ge o$ de sorte que $e^{-2\lambda t} \le 1$, $\forall t \ge 0$.
Compte tenu de (4.19), (4.22) et (4.23) impliquent respectivement

$$\|y_2\|^2_{L^2(0,T ; V)} \le \frac{1}{\alpha^2} \|B_2 v_2\|^2_{L^2(0, T ; V')} \tag{4.24}$$

$$|y_2(T)|^2 \le \frac{e^{2\lambda T}}{\alpha} \|B_2 v_2\|^2_{L^2(0, T ; v')} , \tag{4.25}$$

D'où (4.18) d'après les définitions de $\mathcal{C}$, de G_2 et de σ.
Nous pouvons maintenant énoncer le théorème 4.1 d'existence et d'unicité d'une façon tout à fait identique à celle du théorème 1.1, avec la définition (4.17) de σ et (4.16) de J.

4.3 - Caractérisation des contrôles optimaux.

Les relations (1.3) - (1.4) du chapitre I s'écrivent ici

$$(4.26)\quad \begin{cases} (\mathcal{C}y(u_1, u_2) - z_d, \mathcal{C}G_1(v_1 - u_1))_{\mathcal{H}} + (N_1u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \\ \qquad\qquad \forall v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad},\ u_1 \in \mathcal{U}^1_{ad}, \\ (\mathcal{C}y(u_1, u_2) - z_d, \mathcal{C}G_2(v_2 - u_2))_{\mathcal{H}} - (N_2u_2, v_2 - u_2) \leq 0, \\ \qquad\qquad \forall v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}, u_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}. \end{cases}$$

Nous considérons la situation décrite au point 4.2. Nous introduisons l'état adjoint $p(u_1, u_2)$ par

$$(4.27)\quad \begin{cases} -\frac{d}{dt}\ p(u_1, u_2) + A(t)^*\ p(u_1, u_2) = \beta\ C^*\ \Lambda(Cy(u_1, u_2) - z_{d_1}) \\ p(T\ ;\ v_1, v_2) = \gamma\ D^*(Dy(T\ ;\ u_1, u_2) - z_{d_2}) \\ p(u_1, u_2) \in L^2(0, T\ ;\ V) \end{cases}$$

où $A(t)^*$ = opérateur transposé de $A(t)$,

$C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, L^2(0, T\ ;\ V'))$, C^* = transposé de C,

Λ = isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$,

D^* = transposé de D.

Le problème (4.27) comme le problème (4.5) et pour les mêmes raisons admet une solution unique. Nous pouvons maintenant interpréter (4.26).

Les termes ne contenant pas N_k dans (4.26) deviennent

$$\beta \int_0^T C^*\ \Lambda(C\ y(u_1, u_2) - z_{d_1}),\ y_1(v_1) - y_1(u_1))_{V'V}\ dt + \gamma(y(T\ ;\ u_1, u_2) - z_{d_2},\ y_1(T\ ;\ v_1) - y_1(T\ ;\ u_1))_H$$

$$\beta \int_0^T C^*\ \Lambda(Cy(u_1, u_2) - z_{d_1}),\ y_2(v_2) - y_2(u_1))_{V'V}\ dt + \gamma(y(T\ ;\ u_1, u_2) - z_{d_2},\ y_2(T\ ;\ v_2) - y_2(T\ ;\ u_2))_H$$

où y_k est la solution de (4.10). Les mêmes méthodes (intégration par parties sur $(0, T)$) que dans [43] donnent finalement la caractérisation

$$(4.28)\quad \begin{cases} (B_1^*\ p(u_1, u_2) + \Lambda_{\mathcal{U}_1}\ N_1u_1,\ v_1 - u_1) \geq 0\ ,\quad \forall\ v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad}\ ,\quad u_1 \in \mathcal{U}^1_{ad} \\ (B_2^*\ p(u_1, u_2) - \Lambda_{\mathcal{U}_2}\ N_2\ u_2,\ v_2 - u_2) \leq 0\ ,\quad \forall\ v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad},\quad u_2 \in \mathcal{U}^2_{ad} \end{cases}$$

où $\Lambda_{\mathcal{U}_k}$ = isomorphisme canonique de $\mathcal{U}_k$ sur son dual.

Le théorème 4.2 de caractérisation s'énonce d'une manière identique à celle du théorème 1.2 et la remarque 1.1 est bien sûr valable ici. On remarque d'autre

part que si $N_k = \nu_k I$, $\nu_k > 0$, $k = 1, 2$, (4.28) équivaut à

(4.29) $\quad u_1 = P_1(-\frac{1}{\nu_1} \Lambda_{\mathcal{U}_1}^{-1} B_1^* p)$

(4.30) $\quad u_2 = P_2(\frac{1}{\nu_2} \Lambda_{\mathcal{U}_2}^{-1} B_2^* p)$

où P_k est le projecteur sur $\mathcal{U}_{ad}^k$.

§ 5 - Exemple : équation parabolique du deuxième ordre ; problème mixte de Neumann.

5.1- Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ régulière et T fixé fini.

On pose

(5.1) $\quad Q = \Omega \times]0, T[\ , \qquad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\ ,$

$A(t)$ est une famille d'opérateurs elliptiques du deuxième ordre :

(5.2) $$A(t)\varphi = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j})$$

où

(5.3) $$\begin{cases} a_{ij} \in L^\infty(Q), \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 , \quad \alpha > 0 , \ \xi_i \in \mathbb{R}, \text{ p.p. dans } Q . \end{cases}$$

On prend $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$.

Pour $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ on pose

(5.4) $$a(t ; \varphi, \psi) = \int_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx .$$

Soit

(5.5) $\quad \mathcal{U}_1 = L^2(\Sigma) \ , \quad \mathcal{U}_2 = L^2(Q) \ , \quad N_k = \nu_k I \ , \quad \nu_k \geq 0 \ , \quad k = 1, 2 .$

(5.6) $\quad f$ donnée dans $L^2(Q)$, g donnée dans $L^2(\Sigma)$.

On définit $\mathcal{F} \in L^2(0, T ; V')$ par

(5.7) $$(\mathcal{F}(t), \varphi)_{V'V} = \int_\Omega f(t)\varphi \, dx + \int_\Gamma g(t)\varphi \, dx , \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

et $B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1, L^2(0, T ; V'))$ par

(5.8) $$((B_1 v_1)(t), \varphi)_{V'V} = \int_\Gamma v_1(t)\varphi \, d\Gamma , \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega) .$$

On pose enfin

(5.9) $\quad B_2 = \text{identité} .$

Il est classique ([44], [43]) que, sous les hypothèses et définitions (5.2) à (5.9), pour chaque couple (v_1, v_2) donné dans $L^2(Q) \times L^2(\Sigma)$ le problème (4.5) admet une solution unique $y(v_1, v_2)$ et s'interprète par le

problème mixte de Neumann suivant :

$$(5.10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = f + v_2 & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = g + v_1 & \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0) = y_o(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $A(t)$ est l'opérateur formel défini en (5.2) et où

$$(5.11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \dfrac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_i) \\ \cos(\vec{n}, x_i) = \text{i-ème cosinus directeur de } \vec{n} \text{ normale à } \Gamma \text{ dirigée vers} \\ \quad \text{l'extérieur de } \Omega. \end{cases}$$

Nous considérons alors le jeu différentiel défini par le problème (5.10), la donnée (5.5) et le critère du type (4.16) obtenu en prenant

$$(5.12)\quad \begin{cases} \mathcal{H} = L^2(Q)\ , \quad C = \text{injection de } L^2(0, T\ ;\ H^1(\Omega)) \text{ dans } L^2(Q) \\ D = \text{identité, c'est-à-dire} \end{cases}$$

$$(5.13)\quad J(v_1, v_2) = \beta \int_Q |y(x, t\ ;\ v_1, v_2) - z_{d_1}(x, t)|^2\, dx\, dt +$$

$$+ \gamma \int_\Omega |y(x, T\ ;\ v_1, v_2) - z_{d_2}(x)|^2 dx + \nu_1 \int_\Sigma |v_1(x,t)|^2 d\Sigma - \nu_2 \int_Q |v_2(x,t)|^2 dxdt$$

avec z_{d_1} (resp. z_{d_2}) donné dans $L^2(Q)$ (resp. $L^2(\Omega)$) et β, γ comme en 4.2.

La condition (4.2) est vérifiée ici avec $\lambda = \alpha$, ce qui donne pour le nombre σ défini en (4.17), compte tenu des définitions (5.9) et (5.12),

$$(5.14)\qquad \sigma^2 = \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} e^{2\alpha T}\ .$$

Le problème (4.27) qui définit l'état adjoint s'interprète par

$$(5.15)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A(t)^* p = \beta(y(u_1, u_2) - z_{d_1}) & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ p(x, T) = \gamma(y(x, T\ ;\ u_1, u_2) - z_{d_2}) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $A(t)^*$ est l'adjoint formel de $A(t)$,

$$(5.16)\quad A(t)^* \varphi = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ji}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$$

Les conditions (4.28) s'écrivent ici

(5.17) $\int_\Sigma (p(x, t ; u_1, u_2) + \nu_1 u_1(x, t))(v_1(x, t) - u_1(x, t))d\Sigma \geq 0, \ \forall v_1 \in \mathcal{U}^1_{ad}$

(5.18) $\int_Q (p(x,t ; u_1, u_2) - \nu_2 u_2(x, t))(v_2(x, t) - u_2(x, t))dxdt \leq 0, \ \forall v_2 \in \mathcal{U}^2_{ad}$

L'application des théorèmes 4.1 et 4.2 donnent, en particulier : si $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} e^{2\alpha T}$, il existe un unique couple de contrôles optimaux caractérisé par (5.10) (avec $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$), (5.15), (5.17) et (5.18)

5.2 - Choix des convexes $\mathcal{U}^k_{ad}$.

Exemple 5.1 - Cas sans contrainte ($\mathcal{U}^k_{ad} = \mathcal{U}_k$, k = 1, 2).

Alors (5.17)-(5.18) se réduit à

(5.19) $$u_1 = -\frac{p}{\nu_1} \text{ pp sur } \Sigma, \quad u_2 = \frac{p}{\nu_2} \text{ pp. dans } Q.$$

On obtient les contrôles optimaux en résolvant le système

$$(5.20)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A(t)y - \frac{p}{\nu_2} = f, \text{ dans } Q, \ -\frac{\partial p}{\partial t} + A(t)^*p - \beta y = -\beta z_{d_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + \frac{p}{\nu_1} = g, \text{ sur } \Sigma, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \\ y(x, 0) = y_o(x), \text{ dans } \Omega, \ p(x, T) - \gamma y(x, T) = -\gamma z_{d_2} \end{cases}$$

et les contrôles optimaux sont donnés ensuite par (5.19).

Exemple 5.2.

$\mathcal{U}^1_{ad} = \{v | v \in L^2(\Sigma), \ v \geq 0 \text{ p.p. sur } \Sigma\}$,

$\mathcal{U}^2_{ad} = \mathcal{U}_2 (= L^2(\Omega))$.

(5.18) se réduit à une équation et donne

$$u_2 = \frac{p}{\nu_2}.$$

Pour interpréter (5.17) nous utilisons la forme équivalente (4.29) qui donne ici

(5.19) $u_1 = -\frac{1}{\nu_1} \inf(0, p)$, sur Σ.

On peut alors éliminer les contrôles dans l'équation d'état.

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$(5.20)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A(t)y - \frac{p}{\nu_2} = f, \text{ dans } Q, \ -\frac{\partial p}{\partial t} + A(t)^*p - \beta y = -\beta z_{d_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + \frac{1}{\nu_1} \inf(0, p), \text{ sur } \Sigma, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \\ y(x, 0) = y_o(x), \text{ dans } \Omega, \ p(x, T) - \gamma y(x, T) = -\gamma z_{d_2} \end{cases}$$

Les contrôles optimaux sont donnés ensuite par (5.18)-(5.19)

Toujours pour le même exemple, on peut éliminer u_1 et u_2 dans l'équation d'état en interprétant l'inéquation (5.17) en termes de conditions unilatérales suivant les mêmes méthodes que LIONS([43]).

(5.20) est alors remplacé par

$$(5.21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y - \dfrac{p}{\nu_2} = f, \text{ dans } Q, \; -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A(t)^*p - \beta y = -\beta z_{d_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - g \geq o, \text{ sur } \Sigma, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \\ p + \nu_1(\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - g) \geq o, \text{ sur } \Sigma, \; (\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - g)(p + \nu_1(\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - g)) = 0 \\ y(x, 0) = y_o(x), \text{ dans } \Omega, \; p(x, T) - \gamma y(x, T) = -\gamma z_{d_2}. \end{cases}$$

Les contrôles optimaux sont donnés par

$$(5.22)\qquad u_1 = \frac{\partial y}{\partial \nu_A} - g \text{ sur } \Sigma, \; u_2 = \frac{p}{\nu_2}.$$

<u>Remarque 5.1.</u>

Si l'un des $\mathcal{U}^k_{ad}$ est égal $\mathcal{U}_k$ ou si $N_k = \nu_k \times$ identité (auquel cas on a (4.29)-(4.30)) on peut appliquer la remarque 2.1.

§ 6 - Découplage et équation de Riccati.

6.1 - Notations et hypothèses.

On se place dans le cadre du n°4 sous les hypothèses suivantes (cf [43], chap. 3, n°4),

$$(6.1)\qquad \mathcal{U}_k = L^2(0, T ; E_k), \quad E_k = \text{espace de Hilbert}, \quad k = 1,2,$$

$$(6.2)\qquad \mathcal{H} = L^2(0, T ; F), \quad F = \text{espace de Hilbert} ;$$

soient

$$(6.3)\quad \begin{cases} B_k(t) \in \mathcal{L}(E_k, H), \quad C(t) \in \mathcal{L}(H, F), \quad t \in [0, T], \\ t \to (B_k(t)\, e_k, \psi) \text{ et } t \to (C(t)\varphi, f') \text{ étant mesurable} \\ \forall\, e_k \in E_k, \; \psi \in H, \; \varphi \in H, \; f' \in F', \text{ et} \\ \|B_k(t)\|_{\mathcal{L}(E_k, H)} \leq c, \quad \|C(t)\|_{\mathcal{L}(H,F)} \leq c. \end{cases}$$

Les opérateurs B_k (resp. C) sont définis par

$$(6.4)\quad \begin{cases} B_k u_k : t \to B_k(t)u_k(t), \quad u_k \in \mathcal{U}_k \\ C f : t \to C(t) f(t), \quad f \in L^2(0, T ; H). \end{cases}$$

On suppose encore

$$(6.5)\quad \begin{cases} N_k\, u_k : t \to N_k(t)u_k(t) \quad \text{où} \\ N_k(t) \in \mathcal{L}(E_k, E_k),\ (N_k(t)e_k, e_k') \ \text{mesurable},\ \|N_k(t)\| \le c \\ N_k(t) \ \text{symétrique et}\ (N_k(t)e_k, e_k)_{E_k} \ge \nu_k \|e_k\|^2_{E_k}, \\ \qquad\qquad \forall e_k \in E_k,\ t \in [0, T]. \end{cases}$$

Soient

(6.6) Λ_k (resp. Λ_F) l'isomorphisme canonique de E_k (resp. F) sur son dual.

Alors $(\Lambda_{\mathcal{U}_k} u_k)(t) = \Lambda_k\, u_k(t)$ p.p. , $(\Lambda\, \varphi)(t) = \Lambda_F\, \varphi(t)$ p.p.

On pose

$$(6.7)\quad \begin{cases} D_1(t) = B_1(t)\, N_1(t)^{-1}\, \Lambda_1^{-t}\, B_1(t)^* - B_2(t) N_2(t)^{-1}\, \Lambda_2^{-1}\, B_2(t)^* \\ D_2(t) = \beta\, C(t)^*\, \Lambda_F\, C(t) \\ \tilde{\mathcal{F}}(t) = -\,\beta\, C(t)^*\, \Lambda_F\, z_{d_1}(t) \end{cases}$$

Alors $D_1(t) \in \mathcal{L}(H, H)$, $D_2(t) \in \mathcal{L}(H, H)$ et $D_1(t)$ et $D_2(t)$ sont des opérateurs symétriques.

On suppose enfin (cas sans contrainte),

(6.8) $\mathcal{U}^k_{ad} = \mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$.

Les conditions d'optimalité (4.28) se réduisent à deux équations qui donnent ici

(6.9) $u_1(t) = -\, N_1^{-1}(t)\, \Lambda_1^{-1}\, B_1^*(t)\, p(t)$, $u_2(t) = N_2^{-1}(t)\, \Lambda_2^{-1} B_2^*(t) p(t), t \in [0, T]$

ce qui a un sens puisque $p \in W(0, T) \subset C^0([0, T], H)$.

On peut alors éliminer u_1 et u_2 dans l'équation d'état et obtenir le système couplé en (y, p) (cf. exemple 5.1),

$$(6.10)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)y + D_1(t)p = \mathcal{F}, \quad t \in [0, T] \\ -\dfrac{dp}{dt} + A(t)^*\, p - D_2(t)y = \tilde{\mathcal{F}}, \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \quad , \quad p(T) - \gamma\, D^*\, Dy(T) = -\,\gamma\, D^*\, z_{d_2}, \end{cases}$$

système qui admet une solution unique si

(6.11) $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > \sigma^2$ (cf. déf. (4.17)).

On se propose maintenant de découpler le système (6.10).

6.2 - Equation de Riccati.

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire

(6.12) $\qquad D_1(t)$ positif , $\forall\, t \in [0, T]$

de sorte qu'on peut définir $D_1^{\frac{1}{2}}(t)$ ([54]). On a alors

Théorème 6.1.

Hypothèses et notations du n°6.1 avec (6.11), (6.12), $f \in L^2(0, T ; H)$ et : l'injection de V dans H est compacte. Soit (y, p) la solution de (6.10) donnant le couple des contrôles optimaux. Alors

(6.13) $$p = P\,y + r$$

où P et r ont les propriétés suivantes :

(6.14) $$\begin{cases} P \in L^\infty(0, T ; \mathcal{L}(H, H)) \ , \ P(t) \geq 0 \text{ autoadjoint,} \\ \text{si } \varphi \in W(0, T) \text{ avec } \dfrac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi \in L^2(0, T ; H) \text{ alors } P(t)\varphi \in W(0,T) \ ; \end{cases}$$

$P(t)$ est la solution unique de l'équation de Riccati

(6.15) $$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}(P(t)\varphi) + P(t)(\dfrac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi) + A(t)^* P(t)\varphi + P(t)D_1(t)P(t)\varphi = D_2(t)\varphi \\ \text{pour tout } \varphi \text{ comme dans (6.14) avec } A\varphi \in L^2(0, T ; H), \\ P(T) = \gamma\, D^* D \ ; \end{cases}$$

r est la solution unique dans $W(0, T)$ de

(6.16) $$\begin{cases} -\dfrac{dr}{dt} + A(t)^* r + P(t)\, D_1(t)\, r = P(t)\,\mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}} \\ r(T) = -\,\gamma\, D^*\, z_{d_2}. \end{cases}$$

démonstration.

On reprend l'idée utilisée dans BENSOUSSAN [6]. On va montrer que le système (6.10) est équivalent à un problème de contrôle optimal à un seul contrôle.

En effet considérons le problème de contrôle optimal suivant.

L'état est défini par

(6.17) $$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + A(t)z = \mathcal{F} + D_1^{\frac{1}{2}}(t)v \\ z(0) = y_0 \end{cases}$$

où $v \in \mathcal{U} = L^2(0, T ; H)$ espace des contrôles, et le critère est donné par

(6.18) $$I(v) = \beta \int_0^T |C(t)z(t ; v) - z_{d_1}(t)|_F^2\, dt + \gamma |Dz(T ; v) - z_{d_2}|_H^2 + \int_0^T |v(t)|_H^2\, dt$$

et on cherche $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}} I(v)$

On sait ([43]) que ce problème admet une solution unique u caractérisée par

$$(6.19) \qquad u = - D_1^{\frac{1}{2}} q$$

où q est l'état adjoint solution unique de

$$(6.20) \qquad \begin{cases} -\dfrac{dq}{dt} + A(t)^* q = \beta\, C^*(t)\, \Lambda_\Gamma (C(t)z - z_{d_1}) \\ q(T) = \gamma\, D^*(D\, z(T) - z_{d_2}) \end{cases}$$

et z la solution de (6.17) pour $v = u$.
En éliminant u on obtient un système en (z, q) qui n'est autre que le système (6.10) et donc $z = y$ et $q = p$.

On découple le système (6.10) suivant les méthodes de LIONS [43] dont le théorème 4.4, chap. 3, donne le résultat.

Remarque 6.1.

Précisons le rôle de l'hypothèse (6.11). Si on suppose seulement que N_1 et N_2 sont inversibles (ce qui permet de définir D_1 par (6.7)) et que (6.12) a lieu, la démonstration du théorème 6.1 montre qu'il existe un unique couple (u_1, u_2) vérifiant (6.9), (6.10) et que le système (6.10) peut être découplé. Or (6.9)-(6.10) (qui équivaut à (4.28)) est, en général, seulement nécessaire pour que (u_1, u_2) soit point de selle. L'hypothèse (6.11) assurant la convexité-concavité du critère, (6.9)-(6.10) est alors suffisant et l'existence et l'unicité du point de selle est ainsi redémontrée sans utiliser les théorèmes généraux du chapitre I. (sauf celui de caractérisation bien sûr).

Remarque 6.2.

Le théorème 6.1 permet de réaliser le feedback du problème de jeu : les contrôles optimaux sont en effet donnés au moyen de l'état par

$$(6.21) \qquad \begin{cases} u_1(t) = - N_1(t)^{-1}\, \Lambda_1^{-1}\, B_1(t)^* \, [P(t)y(t) + r(t)] \\ u_2(t) = \, N_2(t)^{-1}\, \Lambda_2^{-1}\, B_2(t)^* \, [P(t)y(t) + r(t)] \, . \end{cases}$$

Nous avons abordé ici le problème de jeu en boucle ouverte, c'est-à-dire : chercher les contrôles optimaux comme fonctions de t. Dans BENSOUSSAN ([6]), on considère a priori le problème en boucle fermée (feedback), c'est-à-dire : chercher les contrôles comme fonctions de t et de $y(t)$, problème qui n'est pas en général équivalent au précédent, et on montre que, sous l'hypothèse (6.12), les contrôles donnés par (6.21) où (P, r) est la solution de (6.15)-(6.16), fournissent la solution unique. En résumé

(i)(6.12) implique : existence et unicité pour le problème en boucle fermée,

(ii) (6.11) implique : existence et unicité pour le problème en boucle ouverte, (iii) (6.11) et (6.12) implique : les deux solutions de (i) et (ii) coïncident et les deux problèmes sont donc équivalents. A noter que (6.11) et (6.12) ne sont pas nécessairement compatibles (cf. exemple 6.2 ci-après).

Remarque 6.3.

L'hypothèse restrictive $B_k(t) \in \mathcal{L}(E_k, H)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E_k, V')$) permet d'assurer, pour le problème de contrôle introduit dans la démonstration du théorème 6.1, $B(t)(= D_1^{\frac{1}{2}}(t)) \in \mathcal{L}(E, H)$ $(E = H)$ et donc d'appliquer le théorème général de LIONS. Mais, l'équivalence du problème de jeu avec un problème de contrôle peut également se montrer lorsque $B_k(t) \in \mathcal{L}(E_k, V')$. En effet, dans ce cas $D_1(t) \in \mathcal{L}(V, V')$; on prendra alors $B(t) = \Lambda_V(\Lambda_V^{-1} D_1(t))^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation (6.17) et $\mathcal{U} = L^2(0, T ; V)$, le critère restant inchangé sauf pour le dernier terme en v qui devient $\int_0^T |v(t)|_V^2 \, dt$.

Λ_V = isomorphisme canonique de V sur son dual V' et alors

$$B(t)^* = B(t) .$$

Le contrôle optimal qui existe et est unique est donné par $u = - \Lambda_V^{-1} B(t)q$ où q état adjoint solution de (6.20). Par élimination de u on retrouve le système (6.10).

6.3 - Applications.

Exemple 6.1 - Problème mixte de Dirichlet, contrôles distribués.

On prend $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ et $A(t)$ comme au n°5,
$E_1 = E_2 = L_2(\Omega)$, $B_1(t) = B_2(t)$ = identité, $N_k = \nu_k \times$ identité, $\nu_k > 0$, $k = 1, 2$.
$F = H = L^2(\Omega)$, $C(t)$ = identité, Λ = identité, D = identité,
Soit $f \in L^2(Q)$, $z_{d_1} \in L^2(Q)$, $z_{d_2} \in L^2(\Omega)$, $y_o \in L^2(\Omega)$.

L'état est donné par

$$(6.22) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y(u_1,u_2)}{\partial t} + A(t)y(u_1, u_2) = f + u_1 + u_2 & \text{dans } Q \\ y(u_1, u_2) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0 ; u_1, u_2) = y_o(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et le critère par

$$(6.23) \quad J(v_1, v_2) = \beta \int_Q |y(v_1, v_2) - z_{d_1}|^2 \, dx \, dt + \gamma \int_\Omega |y(T ; v_1, v_2) - z_{d_2}|^2 \, dx + \nu_1 \int_Q |v_1|^2 \, dx \, dt - \nu_2 \int_Q |v_2|^2 \, dxdt$$

Le nombre σ^2 défini en (4.17) est égal à celui donné par (5.14).

La condition (6.12) s'écrit ici

$$(6.24) \qquad \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \geq 0 \quad \text{i.e} \qquad \nu_1 \leq \nu_2 .$$

(6.11).(6.12) sont donc compatibles. Si elles sont vérifiées il existe un unique point de selle de J donné par la résolution de

$$(6.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A(t)y + (\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2})p = f \quad \text{dans} \quad Q \ , \ y/_{\Sigma} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A(t)^* p - \beta y = -\beta \ z_{d_1} \quad \text{dans} \quad Q \ , \ p/_{\Sigma} = 0 \\ y(x, 0) = y_o(x) \ , \ p(x, T) - \gamma \ y(x, T) = -\gamma \ z_{d_2} \end{cases}$$

et alors

$$(6.26) \qquad u_1 = -\frac{p}{\nu_1} \quad , \ u_2 = \frac{p}{\nu_2} \ .$$

On peut découpler le système (6.25)(le théorème 6.1 s'applique). Par analogie avec le point 5.1 de [43] chap.3, on obtient le résultat.

<u>Théorème 6.2.</u>

Si $0 < \nu_1 \leq \nu_2$, la solution (y, p) de (6.25) vérifie

$$(6.27) \qquad p(t) = P(t)y(t) + r(t)$$

où $P(t)$ peut se représenter par

$$(6.28) \qquad P(t)\varphi = \int_{\Omega} P(x, \xi, t)\varphi(\xi)d\xi \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad ,$$

le noyau $P(x, \xi, t)$ satisfaisant l'équation intégro-différentielle de Riccati

$$(6.29) \quad \frac{\partial P}{\partial t}(x, \xi, t) + (A_x^* + A_\xi^*)P(x, \xi, t) + (\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}) \int_{\Omega} P(x, \zeta, t)P(\zeta, \xi, t)d\zeta = \beta \ \delta(x - \xi),$$

$$(6.30) \qquad P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t),$$

$$(6.31) \quad \begin{cases} P(x, \xi, t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma \ , \quad \xi \in \Omega \\ P(x, \xi, T) = \gamma \ \delta(x - \xi) \ , \ (x, \xi) \in \Omega_x \times \Omega_\xi \end{cases}$$

et où r est la solution dans $L^2(0, T \ ; H_o^1 (\Omega))$ de

$$(6.32) \quad \begin{cases} -\frac{\partial r}{\partial t} + A(t)^* r + (\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2})P(t)r = P(t)f - \beta \ z_{d_1} \\ r/_{\Sigma} = 0 \\ r(x, T) = -\gamma \ z_{d_2} \ . \end{cases}$$

<u>Exemple 6.2.</u>

Reprenons l'exemple 5.1. On est, en partie, dans la situation du n° 6.1 avec

$F = H = L^2(\Omega)$, $C(t) =$ identité , $\Lambda_F =$ identité ,

$E_2 = L^2(\Omega)$, $E_1 = L^2(\Gamma)$, $\Lambda_k =$ identité , $k = 1, 2$,

$B_2(t) =$ identité , $N_k(t) = \nu_k$ identité ,

mais $B_1(t)$ est défini par

$$(B_1(t)\varphi, \psi)_{V'V} = \int_\Gamma \varphi\, \psi\, d\Gamma \ , \ \forall\, \varphi \in L^2(\Gamma), \quad \forall\, \psi \in V = H^1(\Omega)$$

et donc $B_1(t) \in \mathcal{L}(E_2, V')$. D'autre part, $\mathcal{F} \in L^2(0, T\ ;\ V')$. Même si la condition (6.12) est satisfaite, le théorème 6.1 n'est pas applicable. Cependant, compte tenu de la remarque 6.3 et en procédant par analogie avec les n°5.1, 5.2, 5.3 de [43] chap. 3, on pourait quand même découpler le système (5.20). Mais la condition (6.12) est impossible à réaliser. En effet, elle se réduit à

$$\frac{1}{\nu_1}|\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} - \frac{1}{\nu_2}\,|\varphi|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ , \ \forall\, \varphi \in H^1(\Omega) \ .$$

Il suffit de choisir $\varphi \in H^1_o(\Omega)$, $\varphi \not\equiv 0$, pour obtenir une contradiction avec $\nu_2 > 0$. Ceci serait également vrai avec $N_2(t) > 0$ quelconque.

<u>Exemple 6.3.</u>

On reprend l'exemple 5.1 en échangeant les rôles de u_1 et u_2.
On prend

$E_1 = V = H^1(\Omega)$, $E_2 = L^2(\Gamma)$,

$B_1(t) = \Lambda_V = (-\Delta + I)$, $B_2(t)$ défini comme $B_1(t)$ à l'exemple 6.2.

Le reste reste inchangé sauf le critère où la partie explicite en (v_1, v_2) devient

$$\nu_1 \int_o^T \|v_1\|^2_V\, dt - \nu_2 \int_\Sigma |v_2|^2\, d\Sigma$$

L'état est donc donné par

$$(6.33) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = f + (-\Delta + I)v_1 & \text{dans } Q \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = g + v_2 & \text{sur } \Sigma \\[2ex] y(x, 0) = y_o(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

La condition (6.11) s'écrit

$$(6.34) \qquad \nu_1 > 0 \ , \qquad \nu_2 > \|\gamma_o\|^2\left(\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha}\ e^{2\alpha T}\right)$$

où $\|\gamma_o\|$ désigne la norme de l'application trace $\varphi \to \varphi/\Gamma$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

La condition (6.12) se réduit elle même à

$$\frac{1}{\nu_1}\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{\nu_2}|\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} \geq 0 \qquad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega)$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \geq \|\gamma_o\|^2. \tag{6.35}$$

Les conditions (6.34)-(6.35) sont compatibles. Si elles sont réalisées il existe un point de selle unique donné par la résolution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y + \dfrac{1}{\nu_1}(-\Delta + I)p = f, \text{ dans } Q, \; -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A(t)^*p - \beta y = -\beta\, z_{d_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - \dfrac{p}{\nu_2} = g\,, \quad \text{sur } \Sigma\,, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \\ y(x, 0) = y_o(x)\,, \text{ dans } \Omega\,, \; p(x, T) - \gamma y(x, T) = -\gamma\, z_{d_2}(x) \end{cases} \tag{6.36}$$

et alors

$$u_1 = -\frac{p}{\nu_1}\,, \quad u_2 = \frac{p}{\nu_2} \quad \text{sur } \Sigma\,; \tag{6.37}$$

on peut découpler le système (6.36). En fait, le théorème 6.1 ne s'applique pas car $D_1(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ et $\mathcal{F} \in L^2(0, T\,; V')$. On utilise alors la remarque 6.3 et on procède par analogie avec [43].

<u>Théorème 6.3</u>

On suppose les coefficients de $A(x, t, \partial/\partial x)$ réguliers dans $\bar{\Omega} \times [0, T]$ et la frontière Γ régulière. Si $0 < \nu_1\|\gamma_o\|^2 \leq \nu_2$, la solution (y, p) de (6.34) vérifie

$$p(t) = P(t)y(t) + r(t).$$

L'opérateur $P(t)$ satisfait à

$$\begin{cases} -(P'\varphi, \psi) + a(t\,; \varphi, P\psi) + a^*(t\,; P\varphi, \psi) + \dfrac{1}{\nu_1}(P\varphi, P\psi)_{H^1(\Omega)} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\nu_2}(P\varphi, P\psi)_{L^2(\Gamma)} = \beta(\varphi, \psi) \\ \forall\, \varphi, \psi \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{6.38}$$

avec

$$\begin{cases} P(T) = \gamma \text{ identité dans } L^2(\Omega) \\ P(t)^* = P(t) \text{ par rapport au produit scalaire de } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{6.39}$$

$$P(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega)) \tag{6.40}$$

et la fonction r satisfait à

$$(6.41)\quad \begin{cases} -(r', \psi) + a^*(t\ ;\ r(t), \psi) + \dfrac{1}{\nu_1}(r, P\psi)_{H^1(\Omega)} - \dfrac{1}{\nu_2}(r, P\psi)_{L^2(\Gamma)} = \\ \qquad (Pf - \beta\, z_{d_1}, \psi) + (g, P\psi)_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

avec

$$(6.42)\qquad r(T) = -\gamma\, z_{d2}\,.$$

Le noyau $P(x, \xi, t)$ de l'opérateur $P(t)$ satisfait (formellement) à

$$(6.43)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial t} + (A^*_x + A^*_\xi)P + \dfrac{1}{\nu_1}\displaystyle\int_\Omega P(\zeta, \xi, t)(-\Delta + I)_\zeta P(x, \zeta, t)d\xi \\ \qquad -\dfrac{1}{\nu_2}\displaystyle\int_\Gamma P(x, \zeta, t)P(\zeta, \xi, t)d\Gamma_\zeta = \beta\,\delta(x - \xi), \\ \qquad\qquad \text{dans } \Omega_x \times \Omega_\xi \times]0, T[\end{cases}$$

avec

$$(6.44)\qquad P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t)$$

$$(6.45)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \nu_{A^*_x}}(x, \xi, t) = 0,\ x \in \Gamma,\ \xi \in \Omega,\ \dfrac{\partial P}{\partial \nu_{A^*_\xi}}(x, \xi, t) = 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \Gamma \\ P(x, \xi, T) = \gamma\,\delta(x - \xi),\ (x, \xi) \in \Omega_x \times \Omega_\xi. \end{cases}$$

§ 7 - Un problème du type poursuite-évasion.

On se place dans le cadre fonctionnel du n°4. On considère le problème, du type poursuite-évasion, suivant

$$(7.1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_p}{dt} + A_p(t)y_p = B_p\, v_p \\ y_p(o) = y_p^o \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_e}{dt} + A_e(t)y_e = B_e\, v_e \\ y_e(0) = y_e^o \end{cases}$$

avec, sur A_p, A_e, B_p, B_e, y_p^o, y_e^o, des hypothèses analogues à celles du n°4 sur A, B_1, B_2, y_o. y_p désigne la position du poursuivant contrôlé par v_p, y_e la position de l'échappé contrôlé par v_e.

Le critère est

$$(7.2)\quad J(u_p, v_e) = |y_p(T\ ;\ v_p) - y_e(T\ ;\ v_e)|^2_H - \eta|y_e(T\ ;\ v_e) - \chi|^2_H + \nu_p\|v_p\|^2_{\mathcal{U}_p} - \nu_e\|v_e\|^2_{\mathcal{U}_e}$$

avec

η constante positive > 1 ,

χ donné dans H, $\nu_p > 0$, $\nu_e > 0$,

$\mathcal{U}_p$, $\mathcal{U}_e$ sont les espaces de Hilbert des contrôles du poursuivant et de l'échappé. Soient $\mathcal{U}_{pad}$, $\mathcal{U}_{ead}$ sous ensembles convexes fermés de $\mathcal{U}_p$, $\mathcal{U}_e$.

PROBLEME 7.1.

Trouver (u_p, u_e) point de selle de J sur $\mathcal{U}_{pad} \times \mathcal{U}_{ead}$.

L'interprétation concrète est la suivante : l'échappé veut atteindre l'objectif χ tout en évitant le poursuivant qui cherche à le rattraper.

Théorème 7.1.

Le PROBLEME 7.1 admet une solution unique (u_p, u_e) caractérisée par

$$(7.3)\quad \begin{cases} (y_p(T\,;u_p) - y_e(T\,;u_e),\ y_p(T\,,v_p) - y_p(T\,;u_p)) + \\ \qquad\qquad + \nu_p(u_p, v_p - u_p)_{\mathcal{U}_p} \geq 0,\ \forall v_p \in \mathcal{U}_{pad}, \\ (y_p(T\,;u_p) + (\eta - 1)y_e(T\,;u_e) - \eta\chi,\ y_e(T\,;v_e) - y_e(T\,;u_e)) + \\ \qquad\qquad + \nu_e(u_e, v_e - u_e)_{\mathcal{U}_e} \geq 0,\ \forall v_e \in \mathcal{U}_{ead}. \end{cases}$$

démonstration.

L'application $v_p \to y_p(T\,;v_p)$ (resp. $v_e \to y_e(T\,;u_e)$) est affine continue de $\mathcal{U}_p$ (resp. $\mathcal{U}_e$) dans H. On a donc

$$(7.4)\quad \begin{cases} y_p(T\,;v_p) = E_p v_p + \xi_p\ ,\quad E_p \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_p, H)\ ,\quad \xi_p \in H\ , \\ y_e(T\,;v_e) = E_e v_e + \xi_e\ ,\quad E_e \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_e, H)\ ,\quad \xi_e \in H\ . \end{cases}$$

Le critère (7.2) s'écrit alors

$$(7.5)\quad J(v_1, v_2) = |E_p v_p - E_e v_e + \xi_p - \xi_e|_H^2 - \eta|E_e v_e + \xi_e - \chi|_H^2 + \\ + \nu_p\|v_p\|^2 - \nu_e\|v_e\|^2$$

et est de type quadratique (1.1) du chapitre I avec (au changement évident de notation près)

$$a_p(v_p, v_p) = (E_p v_p, E_p v_p) + \nu_p\|v_p\|^2$$
$$a_e(v_e, v_e) = (\eta - 1)(E_e v_e, E_e v_e) + \nu_e\|v_e\|^2$$
$$b(v_e, v_p) = -(E_p v_p, E_e v_e)$$
$$L_p(v_p) = -(\xi_p - \xi_e, E_p v_p)$$
$$L_e(v_e) = -(E_e v_e, (\eta - 1)\xi_e - \eta\chi + \xi_p).$$

On est donc ramené à l'application des théorèmes 1.2, 2.2, 2.3(i) du chapitre I. Le point de selle existe et est unique et caractérisé par

$$(E_p u_p - E_e u_e + \xi_p - \xi_e, E_p(v_p - u_e)) + \nu_p(u_p, v_p - u_p) \geq 0 , \quad \forall v_p \in \mathcal{U}_{pad} ,$$

$$((\eta - 1)E_e u_e + E_p u_p + (\eta - 1)\xi_e - \eta\chi + \xi_p, E_e(v_e - u_e) + \nu_e(u_e, v_e - u_e) \geq 0,$$

$$\forall v_e \in \mathcal{U}_{ead} ,$$

ce qui, compte tenu de (7.4), équivaut à (7.3).

Nous introduisons maintenant les états adjoints $q_p(t ; u_p, u_e)$ $q_e(t ; u_p, u_e)$ solutions respectives de

$$(7.6) \begin{cases} -\dfrac{dq_p}{dt} + A_p(t)^* q_p = 0 \\ q_p(T) = y_p(T ; u_p) - y_e(T ; u_e) \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{dq_e}{dt} + A_e(t)^* q_e = 0 \\ q_e(T) = y_p(T ; u_p) + (\eta - 1) y_e(T ; u_e) - \eta\chi . \end{cases}$$

Par les mêmes méthodes que [43], chap. 3, on transforme la condition (7.3) à l'aide de l'état adjoint et on obtient

<u>Théorème 7.2.</u>

La solution du PROBLEME 7.1 est caractérisée par

$$(7.7) \begin{cases} (\Lambda_p^{-1} B_p^* \; q_p(u_p, u_e) + \nu_p u_p, v_p - u_p)_{\mathcal{U}_p} \geq 0 , \quad \forall v_p \in \mathcal{U}_{pad} , \; u_p \in \mathcal{U}_{pad} , \\ (\Lambda_e^{-1} B_e^* \; q_e(u_p, u_e) + \nu_e u_e, v_e - u_e)_{\mathcal{U}_e} \geq 0 , \quad \forall v_e \in \mathcal{U}_{ead} , \; u_e \in \mathcal{U}_{ead} , \end{cases}$$

où B_p^*(resp. B_e^*) désigne l'opérateur transposé de B_p(resp. B_e)

$$B_p^* \in \mathcal{L}(L^2(0, T ; V), \mathcal{U}_p') \quad , \; B_e^* \in \mathcal{L}(L^2(0, T ; V), \mathcal{U}_e') ,$$

Λ_p = isomorphisme canonique de $\mathcal{U}_p$ sur $\mathcal{U}_p'$

Λ_e = isomorphisme canonique de $\mathcal{U}_e$ sur $\mathcal{U}_e'$.

<u>Le cas sans contrainte.</u>

$\mathcal{U}_{pad} = \mathcal{U}_p$, $\mathcal{U}_{ead} = \mathcal{U}_e$. La condition (7.7) se réduit à

$$(7.8) \qquad \begin{cases} u_p = -\dfrac{1}{\nu_p} \; \Lambda_p^{-1} \; B_p^* \; q_p(u_p, u_e) \\ u_e = -\dfrac{1}{\nu_e} \; \Lambda_e^{-1} \; B_e^* \; q_e(u_p, u_e) \end{cases}$$

On peut alors éliminer les contrôles dans les équations d'état. On doit donc résoudre ($' = \dfrac{d}{dt}$)

$$(7.9)\begin{cases} y_p' + A_p(t)y_p + \frac{1}{\nu_p} B_p \Lambda_p^{-1} B_p^* q_p = 0, \ y_p(0) = y_p^o \\ y_e' + A_e(t)y_e + \frac{1}{\nu_e} B_e \Lambda_e^{-1} B_e^* q_e = 0 \ , \ y_e(0) = y_e^o \\ - q_p' + A_p(t)^* q_p = 0 \ , \ q_p(T) = y_p(T) - y_e(T) \\ - q_e' + A_e(t)^* q_e = 0 \ , \ q_e(T) = y_p(T) + (\eta - 1)y_e(T) - \eta\chi \ . \end{cases}$$

Les contrôles optimaux s'obtiennent ensuite par (7.8).

§ 8 - Approximation.

8.1 - Le problème exact. Rappels.

Nous nous plaçons dans le cadre général suivant, valable aussi bien pour les problèmes stationnaires étudiés aux n°1, 2, 3 que pour les problèmes d'évolution des n°4, 5, 6. On se donne

$$(8.1)\begin{cases} \mathcal{H}, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \text{ espaces de Hilbert sur } \mathbb{R}, \ \chi \in \mathcal{H}, \\ E_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{H}), \ k = 1, 2, \ \nu_1 \geq 0, \ \nu_2 \geq 0. \end{cases}$$

Soit

$$(8.2) \quad J(v_1, v_2) = \|E_1 v_1 + E_2 v_2 + \chi\|_{\mathcal{H}}^2 + \nu_1 \|v_1\|_1^2 - \nu_2 \|v_2\|_2^2 \ .$$

On suppose

$$(8.3) \quad \nu_1 > 0 \ , \ \nu_2 > c_2 \ \text{ avec } \ c_2 \geq \|E_2\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})} \ .$$

Le problème exact est de déterminer les points de selle de J sur $\mathcal{U}_{1ad} \times \mathcal{U}_{2ad}$ ($\mathcal{U}_{kad}$ = convexe fermé de $\mathcal{U}_k$). On sait que, sous l'hypothèse (8.3), ce problème admet une solution unique (u_1, u_2) caractérisée par

$$(8.4)\begin{cases} (E_1 u_1 + E_2 u_2 + \chi, E_1(v_1 - u_1))_{\mathcal{H}} + \nu_1(u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \\ \qquad\qquad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{1ad}, \ u_1 \in \mathcal{U}_{1ad} \ , \\ (E_1 u_1 + E_2 u_2 + \chi, E_2(v_2 - u_2))_{\mathcal{H}} - \nu_2(u_2, v_2 - u_2) \leq 0, \\ \qquad\qquad \forall v_2 \in \mathcal{U}_{2ad}, \ u_2 \in \mathcal{U}_{2ad} \ . \end{cases}$$

Posons

$$(8.5) \quad \begin{cases} \pi_1(u_1, v_1) = (E_1 u_1, E_1 v_1)_{\mathcal{H}} + \nu_1(u_1, v_1)_1 \\ \pi_2(u_2, v_2) = \nu_2(u_2, v_2)_2 - (E_2 u_2, E_2 v_2)_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

π_1, π_2 sont des formes bilinéaires coercives sur $\mathcal{U}_1$ et sur $\mathcal{U}_2$:

$$(8.6) \qquad \pi_1(v_1, v_1) \geq \nu_1 \|v_1\|_1^2 \quad , \quad \pi_2(v_2, v_2) \geq (\nu_2 - c_2)\|V_2\|_2^2 \ .$$

La contition (8.4) équivaut alors à

$$(8.7) \begin{cases} \pi_1(u_1, v_1 - u_1) + \pi_2(u_2, v_2 - u_2) + (E_2 u_2, E_1 v_1)_{\mathcal{H}} - (E_1 u_1, E_2 v_2)_{\mathcal{H}} + \\ \qquad + (\chi, E_1(v_1 - u_1) - E_2(v_2 - u_2))_{\mathcal{H}} \geq 0 \\ \qquad\qquad \forall\, v_k \in \mathcal{U}_{kad},\ u_k \in \mathcal{U}_{kad},\ k = 1, 2 \ . \end{cases}$$

8.2 - <u>Le problème approché. Notations et hypothèses.</u>

On adapte ici une méthode présentée dans [8], [11].
Soient $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$ deux ensembles d'indices pris dans des espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{U}_{\zeta_1}$ et $\mathcal{U}_{\zeta_2}$ deux suites d'espaces vectoriels de dimensions finies, $q_{\zeta_k} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_{\zeta_k}, \mathcal{U}_k)$ deux suites d'opérateurs linéaires continus, injectifs et $s_{\zeta_k} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_{\zeta_k})$ avec les propriétés suivantes :

$$(8.8) \quad \forall\, u_k \in \mathcal{U}_k \ , \quad \|q_{\zeta_k} s_{\zeta_k} u_k\|_k \leq \mathrm{Cte}\|u_k\|_k$$

$$(8.9) \quad \forall\, u_k \in \mathcal{U}_k \ , \ q_{\zeta_k} s_{\zeta_k} u_k \to u_k \ \text{ dans } \mathcal{U}_k \ \text{ fort quand } \ \zeta_k \to 0.$$

On munit $\mathcal{U}_{\zeta_k}$ de la norme

$$(8.10) \qquad |u_{\zeta_k}|_{\zeta_k} = \|q_{\zeta_k} u_{\zeta_k}\|_k \ .$$

Soit maintenant

$E_{1\xi}$, $E_{2\xi}$ deux suites d'opérateurs linéaires continus

$$E_{1\xi} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1, \mathcal{H}) \quad , \quad E_{2\xi} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})$$

où ξ parcourt un ensemble d'indices pris dans un espace vectoriel de dimension finie. On suppose

$$(8.11) \begin{cases} |E_{1\xi}|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1, \mathcal{H})} \leq c_1 & \text{constante indépendante de } \xi, \\ |E_{2\xi}|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})} \leq c_2 & \text{constante définie en } (8.3), \end{cases}$$

$$(8.12) \begin{cases} \varepsilon \text{ désignant le triplet } (\xi, \zeta_1, \zeta_2), \text{ si } \varepsilon \to o, \text{ si} \\ q_{\zeta_k} u_{k\varepsilon} \to u_k \ \text{ dans } \mathcal{U}_k \ \text{ faible (resp. fort)}, \ E_{k\xi}\, q_{\zeta_k} u_{k\varepsilon} \to E_k u_k \\ \text{dans } \mathcal{H} \ \text{ faible (resp. fort)}, \ k = 1, 2. \end{cases}$$

K_{ζ_k} est un convexe fermé de $\mathcal{U}_{\zeta_k}$ défini par

(8.13) $\quad V_{\zeta_k} \in K_{\zeta_k}$ si et seulement si $q_{\zeta_k} v_{\zeta_k} \in \mathcal{U}_{kad}$, $k = 1,2$

et vérifiant

(8.14) $\begin{cases} \text{pour tout } u_k \in \mathcal{U}_{kad}, \text{ il existe } \rho_{\zeta_k} u_k \in K_{\zeta_k} \text{ tel que } q_{\zeta_k} \rho_{\zeta_k} u_k \to u_k \\ \text{dans } \mathcal{U}_k \text{ fort, } k = 1,2. \end{cases}$

Le problème approché est alors le suivant. Trouver les points de selle de

(8.15) $\quad J_\varepsilon(v_{\zeta_1}, v_{\zeta_2}) = \|E_{1\xi} q_{\zeta_1} v_{\zeta_1} + E_{2\xi} q_{\zeta_2} v_{\zeta_2} + \chi_\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \nu_1 |v_{\zeta_1}|^2_{\zeta_1} - \nu_2 |v_{\zeta_2}|^2_{\zeta_2}$

sur $K_{\zeta_1} \times K_{\zeta_2}$, où χ_ξ est donné dans $\mathcal{H}$ et vérifié $\chi_\xi \to \chi$ dans $\mathcal{H}$ fort lorsque $\xi \to 0$. Dans les applications, le paramètre ξ correspond à la discrétisation de l'équation d'état selon les méthodes de [12], [53].

On pose

(8.16) $\begin{cases} \pi_{1\varepsilon}(u_{\zeta_1}, v_{\zeta_1}) = \nu_1 (u_{\zeta_1}, v_{\zeta_1})_{\zeta_1} + (E_{1\xi} q_{\zeta_1} u_{\zeta_1}, E_{1\xi} q_{\zeta_1} v_{\zeta_1})_{\mathcal{H}}, \\ \pi_{2\varepsilon}(u_{\zeta_2}, v_{\zeta_2}) = \nu_2 (u_{\zeta_2}, v_{\zeta_2})_{\zeta_2} - (E_{2\xi} q_{\zeta_2} u_{\zeta_2}, E_{2\xi} q_{\zeta_2} v_{\zeta_2})_{\mathcal{H}}. \end{cases}$

Il est clair que $\pi_{1\varepsilon}$, $\pi_{2\varepsilon}$ vérifient

(8.17) $\begin{cases} \pi_{1\varepsilon}(v_{\zeta_1}, v_{\zeta_1}) \geq \nu_1 |v_{\zeta_1}|^2_{\zeta_1}, \quad \forall v_{\zeta_1} \in \mathcal{U}_{\zeta_1}, \\ \pi_{2\varepsilon}(v_{\zeta_2}, v_{\zeta_2}) \geq (\nu_2 - |E_{2\xi}|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_2, \mathcal{H})}) |v_{\zeta_2}|^2_{\zeta_2}, \quad \forall v_{\zeta_2} \in \mathcal{U}_{\zeta_2}. \end{cases}$

On considère l'inéquation variationnelle

(8.18) $\begin{cases} \pi_{1\varepsilon}(u_{\zeta_1}, v_{\zeta_1} - u_{\zeta_1}) + \pi_2(u_{\zeta_2}, v_{\zeta_2} - u_{\zeta_2}) + (E_{2\xi} q_{\zeta_2} u_{\zeta_2}, E_{1\xi} q_{\zeta_1} v_{\zeta_1})_{\mathcal{H}} \\ \quad - (E_{1\xi} q_{\zeta_1} u_{\zeta_1}, E_{2\xi} q_{\zeta_2} v_{\zeta_2})_{\mathcal{H}} + (\chi_\xi, E_{1\xi} q_{\zeta_1}(v_{\zeta_1} - u_{\zeta_1}) - E_{2\xi} q_{\zeta_2}(v_{\zeta_2} - u_{\zeta_2}))_{\mathcal{H}} \geq \\ \qquad \forall v_{\zeta_k} \in K_{\zeta_k}, \quad u_{\zeta_k} \in K_{\zeta_k}, \quad k = 1,2. \end{cases}$

8.3 - <u>Convergence.</u>

<u>Théorème 8.1.</u>

Le problème approché admet, sous les hypothèses (8.3) et (8.8) à (8.14), une solution unique $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ et quand $\varepsilon \to o$, $q_{\zeta_k} u_{k\varepsilon} \to u_k$ dans $\mathcal{U}_k$ fort, $k = 1,2$ où (u_1, u_2) est la solution du problème exact.

démonstration.

Le problème approché est du type étudié au chapitre I. Grâce à (8.3) et à la deuxième hypothèse (8.11) il admet une solution unique caractérisée par (8.18).

Tout d'abord, $q_{\zeta_k} u_{k\varepsilon}$ reste borné. En effet, dans (8.18), soit $v_{\zeta_k} = \rho_{\zeta_k} v_k$ (cf. hypothèse (8.14) où $v_k \in \mathcal{U}_{kad}$ fixé.

On a

$$(8.19)\quad \begin{cases} \pi_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) + \pi_{2\varepsilon}(u_{2\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \leq \pi_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, \rho_{\zeta_1} v_1) + \pi_{2\varepsilon}(u_{2\varepsilon}, \rho_{\zeta_2} v_2) + \dots \\ \dots + (E_{2\xi} q_{\zeta_2} u_{2\varepsilon}, E_{1\xi} q_{\zeta_1} \rho_{\zeta_1} v_1)_{\mathcal{H}} - (E_{1\xi} q_{\zeta_1} u_{1\varepsilon}, E_{2\xi} q_{\zeta_2} \rho_{\zeta_2} v_2)_{\mathcal{H}} + \dots \\ \dots + (\chi_\xi, E_{1\xi} q_{\zeta_1}(\rho_{\zeta_1} v_1 - u_{1\varepsilon}) - E_{2\xi} q_{\zeta_2}(\rho_{\zeta_2} v_2 - u_{2\varepsilon})_{\mathcal{H}} . \end{cases}$$

Tenant compte des hypothèses (8.11), (8.12), (8.14) et de (8.17), on déduit aisément de (8.19)

$$(8.20)\quad \nu_1 |u_{1\varepsilon}|^2_{\zeta_1} + (\nu_2 - c_2)|u_{2\varepsilon}|^2_{\zeta_2} \leq c_3 |u_{1\varepsilon}|_{\zeta_1} + c_4 |u_{2\varepsilon}|_{\zeta_2} + c_5$$

où c_3, c_4, c_5 sont des constantes positives indépendantes de ε. D'où le résultat.

Soit donc une sous-suite, encore notée $q_{\zeta_k} u_{k\varepsilon}$ convergeant faiblement vers $w_k \in \mathcal{U}_k$; w_k est dans $\mathcal{U}_{kad}$ d'après la définition de K_{ζ_k}. Soit $v_k \in \mathcal{U}_{kad}$ quelconque, et $v_{\zeta_k} = \rho_{\zeta_k} v_k$ et $u_{\zeta_k} = u_{k\varepsilon}$ dans (8.18). On a

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (\pi_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) + \pi_{2\varepsilon}(u_{2\varepsilon}, u_{2\varepsilon})) \geq \liminf_{\varepsilon \to 0} \pi_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) +$$

$$+ \liminf_{\varepsilon \to 0} \pi_{2\varepsilon}(u_{2\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \geq \pi_1(w_1, w_1) + \pi_2(w_2, w_2)$$

d'après (8.12) faible. Tenant compte de (8.12) faible et fort, on peut passer à la limite dans le membre de droite de (8.19). D'où

$$\pi_1(w_1, w_1) + \pi_2(w_2, w_2) \leq \pi_1(w_1, v_1) + \pi_2(w_2, v_2) + (E_2 w_2, E_1 v_1)_{\mathcal{H}} - \dots$$

$$\dots - (E_1 w_1, E_2 v_2)_{\mathcal{H}} + (\chi, E_1(v_1 - w_1) - E_2(v_2 - w_2))_{\mathcal{H}} , \ \forall v_k \in \mathcal{U}_{kad}.$$

ce qui n'est autre que (8.7). Par conséquent, $w_k = u_k$ et la suite entière $q_{\zeta_k} u_{k\varepsilon}$ tend faiblement vers u_k. Comme dans [8], [11], la convergence forte se déduit alors aisément de la convergence faible en faisant $v_{\zeta_k} = \rho_{\zeta_k} u_k$ dans (8.18) et en utilisant (8.17).

8.4 - Application.

L'application aux problèmes elliptiques ou paraboliques étudiés aux numéros

précédents consiste essentiellement à choisir une approximation de l'équation d'état pour que les hypothèses (8.11) (8.12) soient satisfaites. Les méthodes proposées dans [8] sont valables ici. Le seul fait nouveau est la réalisation de la deuxième hypothèse (8.11). Considérons à titre d'exemple la situation du n°1 (problèmes elliptiques) avec observation dans H(C = injection de V dans H)

Soit (p_ξ, r_ξ, V, V_ξ) une approximation interne, stable et consistante de l'espace V ([12]).

L'équation d'état est approchée par

$$(8.21)\quad a(p_\xi y_\xi, p_\xi \varphi_\xi) = (L, p_\xi \varphi_\xi) + (B_1 q_{\zeta_1} u_{\zeta_1}, p_\xi \varphi_\xi) + (B_2 q_{\zeta_2} u_{\zeta_2}, p_\xi \varphi_\xi) \quad \forall \varphi_\xi \in V_\xi .$$

Soit $y_\xi(L, u_{\zeta_1}, u_{\zeta_2})$ la solution de (8.21). On pose

$$(8.22)\quad \begin{cases} E_{1\xi} q_{\zeta_1} u_{\zeta_1} = C\, p_\xi\, y_\xi(0, u_{\zeta_1}, 0) \\ E_{2\xi} q_{\zeta_2} u_{\zeta_2} = C\, p_\xi\, y_\xi(0, 0, u_{\zeta_2}) \end{cases}$$

On déduit, comme dans [8],

$$(8.23)\quad |E_{k\xi}|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_k, H)} \leq \frac{\|B_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_k, V')}}{\alpha} \quad , \quad k = 1,2.$$

On peut donc prendre $c_2 = \sigma$ constante définie en (1.20) et (8.11) est satisfaite. On montrerait exactement comme dans [8] que (8.12) est également satisfaite.

Explicitons maintenant le problème approché. Soit $\{u^i_{\zeta_k}\}_{i=1,m_k}$ (m_k = dimension de l'espace $\mathcal{U}_{\zeta_k}$) une base orthonormée de $\mathcal{U}_{\zeta_k}$, k = 1,2.

Les contrôles approchés s'écrivent donc sous la forme

$$(8.24)\quad u_{\zeta_k} = \sum_{i=1}^{m_k} \beta^i_k\, u^i_{\zeta_k} \quad , \quad k = 1,2 .$$

Posons

$$(8.25)\quad y_o = p_\xi\, y_\xi(L, 0, 0) \quad , \quad y^i_1 = p_\xi\, y_\xi(0, u^1_{\zeta_1}, 0) \quad , \quad y^i_2 = p_\xi\, y_\xi(0, 0, u^i_{\zeta_2}).$$

La fonctionnelle approchée devient

$$(8.26)\quad J_\varepsilon(u_{\zeta_1}, u_{\zeta_2}) = \Big|\sum_{i=1}^{m_1} \beta^i_1 y^i_1 + \sum_{i=1}^{m_2} \beta^i_2 y^i_2 + y_o - z_d\Big|^2_H + \nu_1 \Big|\sum_{i=1}^{m_1} \beta^i_1 u^i_{\zeta_1}\Big|^2_{\zeta_1} - \nu_2 \Big|\sum_{i=1}^{m_2} \beta^i_2 u^i_{\zeta_2}\Big|^2_{\zeta_2}$$

$$(8.27)\quad \mathcal{J}(\beta_1,\beta_2) = (\mathcal{A}_1\beta_1,\beta_1)_{m_1} - (\mathcal{A}_2\beta_2,\beta_2)_{m_2} + 2\{(\mathcal{B}\beta_2,\beta_1)_{m_1} + (\mathcal{L}_1,\beta_1)_{m_1} - (\mathcal{L}_2,\beta_2)_{m_2}\} + |y_o - z_d|^2_{H'}$$

où $\beta_k \in \mathbb{R}^{m_k}$ désigne le vecteur de composantes β_k^i, $i = 1, m_k$, et où

$$(8.28)\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \{(y_1^i, y_1^j)_H + \nu_1\ \delta_{ij}\}_{1\le i,j\le m_1} & (\delta_{ij} = \text{symbole de Kronecker}), \\ \mathcal{A}_2 = \{\nu_2\ \delta_{ij} - (y_2^i, y_2^j)_H\}_{1\le i,j\le m_2}\ , \quad \mathcal{B} = \{(y_1^i, y_2^j)_H\}_{\substack{1\le i\le m_1 \\ 1\le j\le m_2}}\ , \\ \mathcal{L}_1 = \{(y_1^i, y_o - z_d)_H\}_{1\le i\le m_1}\ , \quad \mathcal{L}_2 = \{(y_2^i, y_o - z_d)_H\}_{1\le i\le m_2}\ . \end{cases}$$

Après la résolution de $m_1 + m_2 + 1$ problèmes aux limites approchés (8.21) et le calculdes matrices et vecteurs (8.28), le problème approché se réduit donc à la recherche des points de selle de la fonction de $m_1 + m_2$ variables réelles (8.27). On vérifie aisément que

$$(8.29)\quad (\mathcal{A}_1\beta_1, \beta_1)_{m_1} \ge \nu_1|\beta_1|^2_{m_1}\ , \quad (\mathcal{A}_2\ \beta_2, \beta_2)_{m_2} \ge (\nu_2 - c_2)|\beta_2|^2_{m_2}.$$

$\mathcal{J}(\beta_1, \beta_2)$ est donc de type quadratique. On peut appliquer les algorithmes du chapitre I. Pour plus de détails (exemples, choix des convexes K_{ζ_k}) et d'autres applications (problèmes paraboliques) nous renvoyons à [31], [42].

Chapitre IV

SUR CERTAINS PROBLEMES DE CONTROLE OPTIMAL POUR DES SYSTEMES DECRITS PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

Nous étudions dans ce chapitre des problèmes de contrôle optimal qui, à notre connaissance, n'ont pas été abordés auparavant.

Au numéro 1 on envisage des problèmes du type de ceux étudiés dans LIONS ([43], chapitre 3), mais où le critère à minimiser est la déviation maximum sur l'intervalle de temps de l'état du système par rapport à l'état désiré. Ce problème a été étudié, pour des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires, par DEMYANOV [20]. Ici nous considérons des systèmes gouvernés par une équation parabolique.

Les problèmes de contrôle optimal en présence de perturbations (ou bruits) sont d'habitude traités par des méthodes stochastiques (cf. BENSOUSSAN [7] pour des système décrits par des équations au dérivées partielles). Cependant, il peut arriver qu'on ne connaisse pas la loi de probabilité des perturbations. Une façon naturelle d'envisager le problème est de chercher à minimiser le pire que peuvent causer les perturbations. C'est ce que nous faisons au numéro 2 pour des systèmes gouvernés par des équations paraboliques, bien que la théorie s'applique aussi pour des problèmes elliptiques (cf. remarque 2.1 ci-après). Signalons que ce type de modèle a été proposé indépendamment par DELFOUR-MITTER ([17]) pour des problèmes avec équations différentielles ordinaires.

Dans les numéros 1 et 2 nous insistons sur les méthodes constructives en appliquant les résultats du chapitre II. En particulier, le point 2.5 traite l'approximation des problèmes perturbés par des problèmes analogues en dimension finie.

Le numéro 3 présente, pour un problème de temps optimal en présence de perturbations, un résultat d'existence qui s'inspire d'un travail de VARAYIA ([64]) sur les jeux différentiels.

§ 1 - Minimisation de la déviation maximum.

1.1 Position du problème. Résultat d'existence et d'unicité.

Les notations et hypothèses sont les mêmes qu'au chapitre III, n°4.1, en ce qui concerne l'équation d'état. Mais nous considérons ici des problèmes à un seul contrôle.

Soit E un espace de Hilbert réel. L'espace des contrôles est

$$\mathcal{U} = L^2(0, T ; E) \cdot \tag{1.1}$$

Soit une famille d'opérateurs

$$B(t) \in \mathcal{L}(E, V') \quad , \quad \|B(t)\|_{\mathcal{L}(E,V')} \leq C \quad , \quad \forall\, t \in]0, T[\ . \tag{1.2}$$

L'état $y(v)$ est la solution dans $L^2(0, T ; V)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)y = \mathcal{F} + B(t)v(t) \\ y(0) = y_o \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\mathcal{F}$ est donné dans $L^2(0, T ; V')$ et $y_o \in H$.

L'espace des observations est H et le critère

$$J(v) = \max_{t \in [0,T]} |y(t ; v) - z_d(t)|_H^2 + (Nv, v)_{\mathcal{U}} \tag{1.4}$$

où z_d est donné dans $C^o([0, T] ; H)$ et où

$$N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U}), \text{ symétrique}, \ (Nv, v) \geq \nu \|v\|_{\mathcal{U}}^2 \quad , \quad \nu \geq o, \quad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{1.5}$$

La définition (1.4) a un sens car $y(v) \in W(0,T)$ et donc

$t \to y(t ; v)$ est continue de $[0,T]$ dans H.

On cherche $u \in \mathcal{U}_{ad}$ sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \ . \tag{1.6}$$

Théorème 1.1.

(i) Si $\nu > o$ il existe un unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$ vérifiant (1.6).
(ii) Si $\nu = 0$ et si $\mathcal{U}_{ad}$ est borné il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ (non nécessairement unique) vérifiant (1.6).

démonstration.

il suffit d'appliquer le théorème 1.1 du chapitre II avec $U = \mathcal{U}$, $W = \mathbb{R}$, $K = \mathcal{U}_{ad}$, $V = [0,T]$ (t joue ici le rôle de v du théorème cité) et la fonctionnelle

$$(t, v) \to I(u, t) = |y(t ; v) - z_d(t)|_H^2 + (Nv, v)_{\mathcal{U}} \ , \tag{1.7}$$

en remarquant que l'application

$v \to y(t\ ;\ v)$ est affine continue de $\mathcal{U}$ dans H, quel que soit $t \in [0, T]$.

1.2 - Caractérisation.

Théorème 1.2.

$u \in \mathcal{U}_{ad}$ vérifie (1.6) si et seulement si

$$(1.8) \qquad \max_{t \in T(u)} (y(t\ ;\ u) - z_d(t),\ y(t\ ;\ v) - y(t\ ;\ u))_H + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}$$

où

$$(1.9) \qquad T(u) = \{t \mid t \in [0, T],\ J(u) = |y(t\ ;\ u) - z_d(t)|_H^2 + (Nu,\ u)_{\mathcal{U}}\}\ .$$

démonstration.

L'application $(t, v) \to y(t\ ;\ v)$ est continue de $[0, T] \times \mathcal{U}$ dans H. En effet soit une suite t_n(resp. v_n) tendant vers t(resp. vers v). On a

$$(1.10) \quad |y(t_n\ ;\ v_n) - y(t\ ;\ v)|_H \leq |y(t_n\ ;\ v_n) - y(t_n\ ;\ v)|_H + |y(t_n;v) - y(t;v)|_H .$$

Dans le membre de droite de (1.10) le second terme tend vers 0 parce que y est continue en t pour chaque v, le premier terme tend également vers 0 car $y(v_n)$ tend vers $y(v)$ dans $W(0,T)$ donc uniformément dans H sur $[0,T]$.

D'autre part, la fonction $I(u,t)$ définie en (1.7) admet, quel que soit $t \in [0,T]$, une dérivée de Gateaux par rapport à u,

$$(1.11) \quad (I'_u(u,t),\ v)_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = 2[(y(t;u) - z_d(t),\ y(t;v) - \xi(t))_H + (Nu,\ v)_{\mathcal{U}}]$$

où ξ désigne la solution de (1.3) avec $v = 0$, et on a

$(u,\ t) \to (I'_u(u,\ t),\ v)$ continue $\forall\, v \in \mathcal{U}$.

Par conséquent, on peut appliquer le corollaire 2.4 du chapitre II avec $U = \mathcal{U}$, $W = \mathbb{R}$, $V = [0,T]$, $K = \mathcal{U}_{ad}$, $J = I$ (t jouant le rôle de v).

D'où le résultat en remarquant que

$y(t\ ;\ v-u) - \xi(t) = y(t\ ;\ v) - y(t\ ;\ u)$.

Pour chaque $s \in T(u)$, $s \neq 0$, nous introduisons l'état adjoint $p_s(u)$ solution de

$$(1.12) \qquad \begin{cases} -\dfrac{dp}{dt} + A(t)^*p = 0 \quad \text{dans }]0,\ s[\\ p_s(s) = y(s\ ;\ u) - z_d(s) \\ p_s \in L^2(0,\ s\ ;\ V) \end{cases}$$

et si $s = 0$, posons $p_o(0) = y_o - z_d(0)$.

On obtient alors, si $s \neq 0$, par intégration par parties, comme dans LIONS [43],

$$(1.13)\quad (y(s;u)-z_d(s),y(s;v)-y(s;u))_H = \int_0^s (p_s(t;u),B(t)(v(t)-u(t))_{V'V}\,dt,$$

(1.13) étant vraie également si $s = 0$ puisque se réduisant à l'identité $0 = 0$.

Donc (1.8) équivaut à

$$(1.14)\quad \max_{s\in T(u)} \int_0^s (\Lambda_E^{-1} B(t)^* p_s(t;u),\ v(t)-u(t))_E\,dt+(Nu,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0,\ \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

où Λ_E = isomorphisme canonique de E sur son dual.

<u>Théorème 1.3.</u>

Si $\nu > 0$, le contrôle optimal u(vérifiant 1.6) existe, est unique et est déterminé par

$$(1.15)\quad \begin{cases} \dfrac{dy(u)}{dt} + A(t)y(u) = \mathcal{F} + B(t)u(t) \\ y(0;u) = y_o \quad ,\ y(u)\in L^2(0,\ T;\ V), \end{cases}$$

$$(1.16)\quad T(u) = \{t\in [0,T] \mid J(u) = |y(t;u)-z_d(t)|_H^2 + (Nu,u)_{\mathcal{U}}\},$$

$$(1.17)\quad \begin{cases} \forall\, s \in T(u)\ ,\ s \neq 0\ , \\ -\dfrac{d\,p_s(u)}{dt} + A(t)^*p_s(u) = 0 \quad ,\quad t \in]0,\ s[\\ p_s(s;u) = y(s;u)-z_d(s)\ ,\ p_s(u)\in L^2(0,s;V)\ , \end{cases}$$

$$(1.18)\quad p_o(0) = y_o - z_d(0),$$

$$(1.19)\quad \begin{cases} \max\limits_{s\in T(u)} \displaystyle\int_0^s (\Lambda_E^{-1} B(t)^* p_s(t;u),\ v(t) - u(t))_E dt + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0 \\ \qquad\qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad},\ u \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$

<u>Remarque 1.1.</u>

Même dans le cas $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, la condition (1.10) ne s'interprète pas facilement et ne permet pas d'exprimer u en fonction de p.

1.3 - <u>Une méthode constructive</u>.

Nous adaptons ici l'algorithme du n°3.5,chap.II. On construit, à partir de $u_o\in\mathcal{U}_{ad}$ les suites $\{u_m\}$, $\{t_m\}$ de la façon suivante

$u_m \to t_m$ par

(1.20) $$|y(t_m;u_m)-z_d(t_m)|_H^2 = \max_{t\in[0,T]} |y(t;u_m)-z_d(t)|_H^2 ,$$

u_m, $t_m \to u_{m+1}$ par

(1.21) $$u_{m+1} = P_{\mathcal{U}_{ad}} (u_m - \rho \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} I'_u(t_m, u_m))$$

où $\rho > o$, $P_{\mathcal{U}_{ad}}$ = projecteur sur $\mathcal{U}_{ad}$ et

$\Lambda_{\mathcal{U}}$ = isomorphisme canonique de $\mathcal{U}$ sur son dual.

Explicitons la dérivée $I'_u(s,u)$. Posons

(1.22) $$\tilde{p}_s(t;u) = \begin{cases} p_s(t;u) \text{ (défini en (1.17)-(1.18)) si } t\in [0,s], \\ 0 \quad \text{ si } t\in]s,T] , \end{cases}$$

alors $\tilde{p}_s(u) \in L^2(0,T;V)$.

De la même façon que pour obtenir (1.13), on a

(1.23) $$(y(s;u)-z_d(s),\ y(s;v)-\xi(s))_H = \int_o^s (p_s(t;u),B(t)v(t))_{V'V}\, dt$$

d'où, d'après (1.11) et (1.22),

$$(I'_u(u,\ s),\ v)_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \int_o^T (B(t)^* \tilde{p}_s(t;u),\ v(t))_{E'E}\, dt + (Nu,\ v)_{\mathcal{U}}$$

$$= (B(.)^* \tilde{p}_s(u) + \Lambda_{\mathcal{U}} Nu,\ v)_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$$

ce qui montre

(1.24) $$I'_u(u,s) = B(.)^* \tilde{p}_s(u) + \Lambda_{\mathcal{U}} Nu .$$

Le passage de u_m à u_{m+1} s'effectue donc de la façon suivante :

(i) on résout (1.3) avec $v = u_m$, ce qui donne $y(u_m)$,

(ii) on détermine un $t_m \in [0,T]$ vérifiant (1.20),

(iii) on résout (1.12) avec $s = t_m$, ce qui donne $p_{t_m}(u_m)$ et donc $\tilde{p}_{t_m}(u_m)$,

(iv) $u_{m+1} = P_{\mathcal{U}_{ad}} (u_m - \rho(\Lambda^{-1} B(.)^* \tilde{p}_{t_m}(u_m) + Nu_m))$, $\rho > o$.

Dans le cas où $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par

(1.25) $$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in \mathcal{U} | v(t)\in E_{ad} \text{ pp. sur }]0,\ T[,\ E_{ad} = \text{convexe fermé de } E\},$$

(iv) s'écrit

(iv)' $$u_{m+1}(t) = \begin{cases} P_{E_{ad}} (u_m(t) - \rho(\Lambda_E^{-1} B(t)^* p_{t_m}(t\ ;\ u_m) + Nu_m(t))), \text{pp. sur}]0,t_m], \\ u_m(t) \text{ (puisque } u_m(t)\in E_{ad}), \text{ pp. sur }]t_m,\ T[. \end{cases}$$

<u>Théorème 1.3.</u>

Si $\nu > o$ et si $\mathcal{U}_{ad}$ est borné, quel que soit $\varepsilon > o$, il existe $\rho(\varepsilon)$ tel que si $\rho \le \rho(\varepsilon)$ il existe $m(\varepsilon,\ \rho)$ tel que, pour tout $m \ge m(\varepsilon,\ \rho)$,

$$\|u_m - u\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon$$

où u désigne le contrôle optimal (qui existe et est unique d'après le théorème 1.1), et $\{u_m\}$ la suite définie par (i) - (iv). On a la même pseudo-convergenc de $J(u_m)$ vers $J(u)$.

démonstration.

On applique le théorème 3.5 du chapitre II avec $U = \mathcal{U}$, $K = \mathcal{U}_{ad}$, $V = [0,T$ $J = I$. On doit essentiellement montrer que $I'_u(u, t)$ est uniformément bornée sur $\mathcal{U}_{ad} \times [0,T]$, l'hypothèse (3.41) du théorème cité résultant de (1.5) avec $\nu > o$. Or, d'après (1.11), on a

$$\begin{aligned}
|(I'_u(u,t),v)_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}| &\leq 2(|y(t;u)|_H + |z_d(t)|_H)|y(t;v)-\xi(t)|_H + C_1\|u\|_{\mathcal{U}}\|v\|_{\mathcal{U}} \\
&\leq 2(|y(u)|_{C^o(H)} + |z_d|_{C^o(H)})|y(v)-\xi|_{C^o(H)} + C_1\|u\|\,\|v\| \\
&\leq 2(C_2\|y(u)\|_{W(0,T)} + |z_d|_{C^o(H)})C_3\|y(v)-\xi\|_{W(0,T)} + C_1\|u\|\|v\| \\
&\leq (C_4\|u\|_{\mathcal{U}} + C_5)\|v\|_{\mathcal{U}} \\
&\leq C_6\|v\| \qquad \text{si } u \in \mathcal{U}_{ad},
\end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 désignent des constantes positives convenables et où $C^o(H) = C^o([0,T] ; H)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

1.4. Exemple.

On prend, comme au n°5 du chapitre III,
$H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, $A(t)$ comme en (5.2), $\mathcal{F}$ comme en (5.7).
Soit $\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$(donc $E = L^2(\Gamma)$) et $B(t)$ défini par

$$(B(t)\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi\,\psi\, d\Gamma \qquad \forall\, \varphi \in L^2(\Gamma),\quad \psi \in H^1(\Omega)$$

L'état est donc donné par

$$(1.26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = f & \text{dans } Q \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = g + u & \text{sur } \Sigma \\[2mm] y(x,0) = y_o(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec y_o donnée dans $L^2(\Omega)$.

Le critère à minimiser est

$$(1.27)\qquad J(v) = \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega |y(x,t;v) - z_d(x,t)|^2 dx + \nu \int_\Sigma |v(x,t)|^2 d\Sigma$$

où z_d donné dans $C^o([0,T] ; L^2(\Omega))$ et $N = \nu \times$ identité, $\nu > o$.

Le contrôle optimal u existe et est unique et est déterminé par (1.26), (1.16) et

$$(1.28)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\, p_s(u) + A(t)^*\, p_s(u) = 0, \text{ dans } Q_s = \Omega \times]0, s[\ , \\ \dfrac{\partial p_s(u)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad , \text{ sur } \Sigma_s = \Gamma \times]0, s[\ , \\ p_s(x, s, u) = y(x, s, u) - z_d(x, s) \ , \text{ dans } \Omega \ , \\ \text{pour } s \in T(u),\ s \neq 0, \end{cases}$$

$$(1.29)\quad p_o(x, 0 ; u) = y_o(x) - z_d(x, 0) \quad \text{si } 0 \in T(u) \ ,$$

$$(1.30)\quad \begin{cases} \max\limits_{s \in T(u)} \displaystyle\int_o^s \int_\Gamma p_s(x, t ; u)(v(x,t) - u(x,t))d\Gamma + \nu \int_\Sigma u(x,t)(v(x,t) \\ \qquad\qquad - u(x,t))d\Sigma \geq 0 \\ \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad} \ , \quad u \in \mathcal{U}_{ad} \ . \end{cases}$$

La méthode du n°1.3 est bien sûr applicable. Supposons $\mathcal{U}_{ad}$ donné par

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma) \,|\, \xi_o(x,t) \leq v(x,t) \leq \xi_1(x,t) \ , \text{ pp. sur } \Sigma \ ,$$
$$\xi_o,\ \xi_1 \text{ données dans } L^2(\Sigma)\} \ .$$

Une itération s'effectue ainsi :

(i) on résout (1.26) avec $u = u_m$, ce qui donne $y(u_m)$,

(ii) on détermine un $t_m \in [0,T]$ vérifiant (1.20),

(iii) on résout (1.28) avec $s = t_m$ (si $t_m \neq 0$, sinon $p_{t_m} = y_o - z_d$), ce qui donne $p_{t_m}(u_m)$,

(iv) u_{m+1} est donné par, en posant pour chaque t,

$$w_m(x,t) = u_m(x,t) - \rho\big(p_{t_m}(x,t ; u_m)|_\Gamma + \nu\, u_m(x,t)\big),$$

$$u_{m+1}(x,t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} w_m(x,t) & \text{si } \xi_o(x,t) \leq w_m(x,t) \leq \xi_1(x,t) \\ \xi_o(x,t) & \text{si } w_m(x,t) < \xi_o(x,t) \\ \xi_1(x,t) & \text{si } w_m(x,t) > \xi_1(x,t) \end{array}\right\} & 0 < t \leq t_m \\ u_m(x,t) & t_m < t < T. \end{cases}$$

§ 2 - Systèmes perturbés. Critère quadratique.

2.1 - Position du problème.

En ce qui concerne l'équation d'état, les notations et hypothèses sont les mêmes qu'au n°4.1 du chapitre III.

Les données supplémentaires sont les suivantes :

(2.1) $\begin{cases} \mathcal{U} \text{ l'espace de Hilbert réel des contrôles et } \mathcal{U}_{ad}, \text{ ensemble} \\ \text{des contrôles admissibles, sous ensemble convexe fermé de } \mathcal{U}, \end{cases}$

(2.2) $\begin{cases} \mathcal{P} \text{ l'espace de Hilbert réel des perturbations et } \mathcal{P}_{tol}, \text{ ensemble des} \\ \text{perturbations tolérées, sous-ensemble borné faiblement fermé de } \mathcal{P}. \end{cases}$

(2.3) $\quad B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(0, T ; V'),$

(2.4) $\begin{cases} \mathcal{C} \text{ opérateur linéaire continu (non nécessairement linéaire) de } \mathcal{P} \text{ dans} \\ L^2(0, T ; V'). \end{cases}$

Pour chaque $u \in \mathcal{U}_{ad}$, $\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}$, l'état $y(u, \bar{\omega})$ du système est la solution unique de

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)y = Bu + \mathcal{C}(\bar{\omega}) , \\ y(0) = y_o , \end{cases}$$

avec y_o donné dans H.

On se donne encore

(2.6) $\begin{cases} \mathcal{H} \text{ espace de Hilbert réel des observations et } C \in \mathcal{L}(L^2(0, T ; V), \mathcal{H}) \\ \text{opérateur complètement continu,} \end{cases}$

(2.7) $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$, symétrique, $(Nv,v)_{\mathcal{U}} \geq \nu\|u\|^2_{\mathcal{U}}$, $\nu \geq 0$,

Le critère est défini par

$$(2.8) \qquad J(v, \bar{\omega}) = \|C\, y\,(v, \bar{\omega}) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv,v)_{\mathcal{U}}$$

où z_d est donné dans $\mathcal{H}$.

Le problème est alors de trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ (contrôle optimal) tel que

$$(2.9) \qquad \sup_{\bar{\omega}\in\mathcal{P}_{tol}} J(u, \bar{\omega}) = \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} \sup_{\bar{\omega}\in\mathcal{P}_{tol}} J(v, \bar{\omega}) \overset{\text{def}}{=} \bar{\delta} .$$

Remarque 2.1.

(i) s'il existe un contrôle optimal u et si $\bar{\delta} < +\infty$, (2.9) entraîne, en particulier,

$$(2.10) \qquad \|Cy(u, \bar{\omega}) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} \leq \bar{\delta} \quad , \quad \forall\, \bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}.$$

(2.9) implique : il existe $v \in \mathcal{U}_{ad}$ (en l'occurrence u) tel que, quel que soit $\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}$ et quel que soit $\delta \geq \bar{\delta}$, $Cy(v, \bar{\omega}) \in \mathcal{B}(z_d, \delta)$ boule de centre z_d et de rayon δ. Autrement dit, suivant la définition de DELFOUR-MITTER [17], $\mathcal{B}(z_d, \delta)$ est fortement accessible quel que soit $\delta \geq \bar{\delta}$.

(ii) Si, pour $\nu = 0$, on a

(2.11) $$\sup_{v \in \mathcal{P}_{tol}} J(v, \bar{\omega}) = \max_{v \in \mathcal{P}_{tol}} J(v, \bar{\omega}) \ , \ \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad} \ ,$$

alors quel que soit $v \in \mathcal{U}_{ad}$, il existe $\bar{\omega}_v \in \mathcal{P}_{tol}$ tel que

(2.12) $$\bar{\delta} \leq \|Cy(v, \bar{\omega}_v) - z_d\|^2 \ ,$$

et donc $\mathcal{B}(z_d, \delta)$ n'est pas fortement accessible si $\delta < \bar{\delta}$.

En résumé : si, pour $\nu = 0$, il existe un contrôle optimal, $\bar{\delta}$ est fini et (2.11) est vérifié, alors pour que $\mathcal{B}(z_d, \delta)$ soit fortement accessible il faut et il suffit que

(2.13) $$\delta \geq \bar{\delta} = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \sup_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \|Cy(v, \bar{\omega}) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} \ .$$

On retrouve ainsi, dans un cas particulier, un résultat de DELFOUR-MITTER ([17], th. 4.1 (iv), p.523).

2.2 - Résultats.

D'après la forme de l'équation d'état (2.5) et grâce à l'unicité de la solution y pour chaque triplet $(Bu, \mathcal{C}(v), y_o)$, on a

(2.14) $$y(u, \bar{\omega}) = Eu + F(\bar{\omega})$$

où $E \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, W(0,T))$ et F = opérateur continu de $\mathcal{P}$ dans $W(0,T)$.

Le critère (2.8) s'écrit alors

(2.15) $$J(u, \bar{\omega}) = \|C\,E\,u + C\,F(\bar{\omega}) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + (Nu, u)_{\mathcal{U}} .$$

Théorème 2.1.

Sous les hypothèses standard sur l'équation (2.5) et sous les hypothèses (2.1) à (2.7), avec $\mathcal{U}_{ad}$ borné si $\nu = 0$, il existe un contrôle optimal et dans (2.9) le sup (resp. inf) est un max (resp. min). Le contrôle optimal est unique si $\nu > 0$. Pour que u soit contrôle optimal il faut et il suffit que

(2.16) $$\max(Cy(u, \bar{\omega}) - z_d, Cy(v, \bar{\omega}) - Cy(u, \bar{\omega}))_{\mathcal{H}} + (Nu, v - u) \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, u \in \mathcal{U}_{ad}$$

où

(2.17) $$\mathcal{P}(u) = \{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol} \,|\, J(u, \bar{\omega}) = \max_{w \in \mathcal{P}_{tol}} J(u, w)\}.$$

démonstration.

Pour l'existence et l'unicité on se ramène, avec un changement de notations évident, à l'exemple 1.1 du chapitre II, en remarquant que, d'après (2.6), l'opérateur CF est complètement continu.

Pour la caractérisation on se ramène à l'exemple 2.2 du chapitre II. On obtient.

$$(2.18)\quad \max_{\bar{\omega}\in\mathcal{P}(u)} \left(C\,E\,u + C\,F(\bar{\omega}) - z_d,\ C\,E\,(v-u)\right)_{\mathcal{H}} + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad},$$

ce qui équivaut à (2.16) d'après (2.14).

Théorème 2.2.

On introduit l'état adjoint $p(u, \bar{\omega})$ solution de

$$(2.19)\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\, p(u, \bar{\omega}) + A(t)^*\, p(u, \bar{\omega}) = C^*\, \Lambda(C\, y(u, \bar{\omega}) - z_d) & \text{dans }]0, T[, \\ p(T\ ;\ u, \bar{\omega}) = 0 \\ p(u, \bar{\omega}) \in L^2(0, T\ ;\ V). \end{cases}$$

La condition (2.16) équivaut alors à

$$(2.20)\quad \max_{\bar{\omega}\in\mathcal{P}(u)} \left(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}\, B^*\, p(u, \bar{\omega}) + Nu,\ v-u\right)_{\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}\ .$$

démonstration.

On procède exactement comme dans LIONS ([43], chap.3 n°2.3), pour chaque

Remarque 2.2

Les hypothèses de la remarque 2.1 sont satisfaites, d'après le théorème 2.

Remarque 2.3.

Contrairement aux problèmes analogues sans perturbation, la condition (2.2 est, en général, non linéaire. Même dans le cas sans contrainte elle ne permet pas, sauf si $\mathcal{P}(u)$ est réduit à un seul élément, d'exprimer u en fonction de p. En fait, (2.20) équivaut à

$$(2.21)\quad \begin{cases} \text{quelque soit } v \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ il existe } \bar{\omega}_v \in \mathcal{P}(u) \text{ tel que} \\ \left(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}\, B^*\, p(u, \bar{\omega}_v) + Nu,\ v-u\right)_{\mathcal{U}} \geq 0. \end{cases}$$

Si $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, (2.21) se réduit à

$$(2.22)\quad \begin{cases} \text{quel que soit } v \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ il existe } \bar{\omega}_1 \in \mathcal{P}(u),\ \bar{\omega}_2 \in \mathcal{P}(u) \text{ tels que} \\ \left(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}\, B^*\, p(u, \bar{\omega}_1) + Nu,\ v\right)_{\mathcal{U}} \geq 0, \\ \left(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}\, B^*\, p(u, \bar{\omega}_2) + Nu,\ v\right)_{\mathcal{U}} \leq 0. \end{cases}$$

Si $\mathcal{P}(u) = \{\bar{\omega}_u\}$ est réduit à un seul élément, (2.21) se réduit à

$$(2.23) \qquad (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u, \bar{\omega}_u) + Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

et si de plus $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ alors (2.23) équivaut à (si $\nu > 0$)

$$(2.24) \qquad u = - N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u, \bar{\omega}_u).$$

On peut alors éliminer u dans (2.5). On résout donc le problème d'optimisation (qui admet une solution unique par hypothèse)

$$(2.25) \quad \begin{cases} \max\limits_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \|C\, y(\bar{\omega}) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(\bar{\omega}), N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(\bar{\omega}))_{\mathcal{U}} \\ \dfrac{dy(\bar{\omega})}{dt} + A(t)y(\bar{\omega}) + BN^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(\bar{\omega}) = \mathcal{C}(\bar{\omega}) \quad , \quad y(0, \bar{\omega}) = y_o, \\ - \dfrac{dp}{dt}(\bar{\omega}) + A(t)^* p(\bar{\omega}) - C^* \Lambda C y(\bar{\omega}) = -C^* \Lambda z_d \quad , \quad p(T, \bar{\omega}) = 0. \end{cases}$$

u est ensuite donné par (2.24). (Comparer avec les remarques 2.1 et 5.1 du chapitre III.)

2.3. <u>Exemples.</u>

On peut bien sûr varier les exemples à l'infini en modifiant la nature du contrôle (distribué, frontière), la nature de la perturbation, la nature de l'observation. Pour cette dernière on est cependant limité par la condition (2.6). Traitons deux exemples.

<u>Exemple 2.1</u> - <u>Problème mixte de Dirichlet, contrôle et perturbation distribués, observation distribuée</u>.

On prend $H = L^2(\Omega)$, $V = H_o^1(\Omega)$, Ω ouvert borné de frontière Γ régulière, et $A(t)$ comme au n°5.1 du chapitre III.

L'état est donné par

$$(2.26) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = u + \bar{\omega} \quad \text{dans } Q, \\ y/\Sigma = 0, \\ y(x,0) = y_o(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On a pris $\mathcal{U} = \mathcal{P} = L^2(Q)$, $B = \mathcal{C}$ = identité.
Soit C = injection de $L^2(0, T ; H_o^1(\Omega)) \to L^2(Q)$.

L'injection de $H_o^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (LIONS-MAGENES [45] chap 1). Donc, d'après un lemme de compacité de LIONS ([44] p.60), C est compact et (2.6) est vérifiée. Le critère est $(z_d \in L^2(Q))$,

$$(2.27)\quad J(v, \bar{\omega}) = \int_Q |y(x, t\ ;\ v, \bar{\omega}) - z_d(x, t)|^2\, dx\, dt + \nu \int_Q |v(x, t)|^2\, dx\, dt\,.$$

Donc, si $\nu > 0$ et si $\mathcal{P}_{tol}$ est un convexe fermé borné de $L^2(Q)$ et $\mathcal{U}_{ad}$ un convexe fermé de $L^2(Q)$, il existe un contrôle optimal unique au sens de (2.9).

L'état adjoint est donné par

$$(2.28)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\, p(u, \bar{\omega}) + A(t)^*\, p(u, \bar{\omega}) = y(u, \bar{\omega}) - z_d & \text{dans } Q, \\ p(u, \bar{\omega})|_\Sigma = 0, \\ p(x, T\ ;\ u, \bar{\omega}) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le contrôle optimal est alors caractérisé par

$$(2.29)\quad \max_{\bar{\omega}\in\mathcal{P}(u)} \int_Q (p(x, t\ ;\ u, \bar{\omega}) + \nu\, u(x, t))(v(x, t) - u(x, t))dx\, dt \geq 0, \quad \forall\, \nu \in \mathcal{U}_{ad}\,.$$

Si $\mathcal{P}(u) = \{\bar{\omega}_u\}$, on peut éliminer u dans (2.26).

Le contrôle optimal s'obtient alors en résolvant le problème :

$$\max_{\bar{\omega}\in\mathcal{P}_{tol}} \int_Q |y(\bar{\omega}) - z_d|^2\, dx\, dt + \frac{1}{\nu} \int_Q |p(\bar{\omega})|^2\, dx\, dt$$

sous les contraintes

$$(2.30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(\bar{\omega}) + A(t)y(\bar{\omega}) + \dfrac{1}{\nu}\, p(\bar{\omega}) = \bar{\omega} & \text{dans } Q, \\ y(\bar{\omega}) = 0 \ \text{ sur } \Sigma,\ y(x, 0\ ;\ \bar{\omega}) = y_o(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t}(\bar{\omega}) + A(t)^* p(\bar{\omega}) - y(\bar{\omega}) = -\, z_d & \text{dans } Q, \\ p(\bar{\omega}) = 0 \ \text{ sur } \Sigma,\ p(x, T\ ;\ \bar{\omega}) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

qui admet la solution unique $\bar{\omega}^*$.

u est alors donné par

$$(2.31)\qquad u = -\frac{1}{\nu}\, p\,(\bar{\omega}^*) \quad \text{dans } Q.$$

<u>Exemple 2.2. Problème mixte de Neumann, contrôle frontière, perturbation distribuée, observation frontière</u>.

On prend $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ et $A(t)$ comme à l'exemple 1. L'état est donné par

$$(2.32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = \bar{\omega} & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = v & \text{sur } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_o(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On a pris $\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$, $\mathcal{P} = L^2(Q)$, $\mathcal{C}$ = identité, B défini par

$$(B\varphi, \psi) = \int_\Sigma \varphi\, \psi\, d\,\Sigma\,, \quad \forall\, \varphi \in L^2(\Sigma)\,, \quad \forall\, \psi \in L^2(0,\, T\,;\, H^1(\Omega)).$$

On prend comme observation $y(v, \bar{\omega})$ sur Σ. Ceci a un sens et C est complètement continu. En effet, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1-\varepsilon}(\Omega)$ est compacte quel que soit $\varepsilon > o$ (Ω est borné) d'après [45], chap.1, p.110. Donc, d'après le lemme de compacité de LIONS ([44], p.60), l'injection de $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ dans $L^2(0, T, H^{1-\varepsilon}(\Omega))$ est compacte si $0 < \varepsilon \leq 1$ puisque, dans ce cas, $H^1(\Omega) \subset H^{1-\varepsilon}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Mais $y(v, \bar{\omega}) \in L^2(0, T\,;\, H^{1-\varepsilon}(\Omega))$ et si $\varepsilon < \frac{1}{2}$ on peut définir $y(v, \bar{\omega})|_\Sigma$ qui est, en particulier, dans $L^2(\Sigma)$ ([45], chap. 4, p.10) et l'application $y \to y|\Sigma$ est linéaire continue de $L^2(0, T\,;\, H^{1-\varepsilon}(\Omega))$ dans $L^2(\Sigma)$. Par conséquent cette application est linéaire complètement continue de $L^2(0, T\,;\, H^1(\Omega))$ dans $L^2(\Sigma)$. Le critère est alors

$$J(v, \bar{\omega}) = \int_\Sigma |y(x, t\,;\, v, \bar{\omega}) - z_d(x, t)|^2\, d\Sigma + \nu \int_\Sigma |v(x, t)|^2\, d\Sigma$$

avec z_d donnée dans $L^2(\Sigma)$. Les théorèmes 2.1 et 2.2 s'appliquent donc. En particulier, si $\nu > 0$ il existe un contrôle optimal unique u déterminé par (2.32) et (2.33)-(2.34) ci-dessous

$$(2.33)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\, p(u, \bar{\omega}) + A(t)^*\, p(u, \bar{\omega}) = 0 & \text{dans } Q \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}\, (u, \bar{\omega}) = y(u, \bar{\omega}) - z_d & \text{sur } \Sigma \\[2ex] p(x, T\,;\, u, \bar{\omega}) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$$(2.34)\quad \max_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}(u)} \int_\Sigma (p(x, t\,;\, u, \bar{\omega}) + \nu u(x, t))(v(x, t) - u(x, t))\, d\Sigma \geq 0, \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad},\ u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Si $\mathcal{P}(u) = \{\bar{\omega}_u\}$, le contrôle optimal s'obtient en résolvant

$$(2.35)\quad \begin{cases} \max\limits_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \displaystyle\int_\Sigma |y(\bar{\omega}) - z_d|^2\, d\Sigma + \frac{1}{\nu} \int_\Sigma |p(\bar{\omega})|^2\, d\Sigma \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t}(\omega) + A(t) y(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \quad \text{dans } Q, \\[2ex] \dfrac{\partial y(\bar{\omega})}{\partial \nu_A} + \dfrac{1}{\nu}\, p(\bar{\omega}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\[2ex] y(x, 0\,;\, \bar{\omega}) = y_o(x) \quad \text{dans } \Omega, \\[2ex] -\dfrac{\partial p(\bar{\omega})}{\partial t} + A(t)^*\, p(\bar{\omega}) = 0 \quad \text{dans } Q, \\[2ex] \dfrac{\partial p(\bar{\omega})}{\partial \nu_{A^*}} - y(\bar{\omega}) = -\, z_d \quad \text{sur } \Sigma, \\[2ex] p(x, T\,;\, \bar{\omega}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

problème qui admet une solution unique (par hypothèse) $\bar{\omega}^*$. Le contrôle optimal est alors donné par

$$u = -\frac{1}{\nu}\, p(\bar{\omega}^*) \quad \text{sur} \quad \Sigma.$$

2.4 - Méthode constructive.

Nous adaptons l'algorithme du n° 3.5, chap. II. La dérivée de J par rapport à u est donnée par

$$(2.36) \qquad J'_u(u, \bar{\omega}) = 2[B^* p(u, \bar{\omega}) + \Lambda_{\mathcal{U}} Nu] \cdot$$

Pour appliquer le théorème 3.5 du chapitre II il faut essentiellement montrer que $J'_u(u, \bar{\omega})$ est uniformément borné sur $\mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{P}_{tol}$. Nous utilisons pour cela la forme suivante

$$(2.37) \quad (J'_u(u, \bar{\omega}), v)_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = 2(C(Eu + F(\bar{\omega})) - z_d, C\,E\,v)_{\mathcal{H}} + (Nu, v)_{\mathcal{U}}$$

obtenu à partir de (2.15).

On a donc

$$\begin{aligned} |(J'_u(u, \bar{\omega}), v)| &\le 2(|C\,E\,u|_{\mathcal{H}} + |CF(\bar{\omega})|_{\mathcal{H}} + |z_d|_{\mathcal{H}})|C\,E\,v|_{\mathcal{H}} + C_1\|u\|\,\|v\| \\ &\le (C_2\|u\| + C_3)\, C_4\|v\| + C_1\|u\|\,\|v\| \quad , \end{aligned}$$

parce que $\mathcal{P}_{tol}$ est borné et CF compact. Si donc on suppose $\mathcal{U}_{ad}$ borné on obtient le résultat.

Explicitons l'algorithme. On part de u_o quelconque dans $\mathcal{U}_{ad}$. On passe de u_m à u_{m+1} par les opérations suivantes :

(i) on détermine un $\bar{\omega}_m \in \mathcal{P}_{tol}$ qui maximise $\|C\,y(u_m, \bar{\omega}) - z_d\|_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{P}_{tol}$ où $y(u_m, \bar{\omega})$ est la solution de (2.5) pour $u = u_m$,

(ii) on résout (2.19) avec $u = u_m$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_m$ ce qui donne $p(u_m, \bar{\omega}_m)$,

(iii) $u_{m+1} = P_{\mathcal{U}_{ad}}\,(u_m - \rho\,(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u_m, \bar{\omega}_m) + Nu_m))$

Théorème 2.3.

Si $\nu > o$ et si $\mathcal{U}_{ad}$ est borné, alors la suite u_m construite par (i) - (iii) vérifie la propriété

$$(2.38) \quad \begin{cases} \forall\, \epsilon > o\ ,\ \exists\, \rho(\epsilon)\ ,\quad \forall\, \rho \le \rho(\epsilon)\ \exists\, m(\epsilon, \rho)\quad ,\quad \forall\, m \ge m(\epsilon, \rho) \\ \qquad \|u_m - u\|_{\mathcal{U}} \le \epsilon \end{cases}$$

où u est le contrôle optimal unique. La suite

$J(u_m, \bar{\omega}_m)$ $(= \max\limits_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} J(u_m, \bar{\omega}))$ vérifie la même propriété de pseudo convergence vers $\bar{\delta}$.

Remarque 2.1.

La mise en oeuvre effective de l'algorithme suppose qu'on en discrétise chaque étape. Au numéro suivant nous exposons une méthode qui au contraire permet de remplacer le problème initial par un problème analogue en dimension finie auquel on peut ensuite appliquer l'algorithme.

2.5. Approximation.

Nous nous plaçons dans le cadre général suivant.
On se donne

$$(2.39)\quad \begin{cases} \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{P} \text{ espaces de Hilbert sur } \mathbb{R} \text{ et } \chi \in \mathcal{H}, \\ E \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H}),\ F \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{H}) \text{ opérateur compact, } \nu > 0. \end{cases}$$

Soit

$$J(v, \bar{\omega}) = \|E\, v + F\, \bar{\omega} + \chi\|^2_{\mathcal{H}} + \nu\, \|v\|^2_{\mathcal{U}}\ .$$

Le problème exact est de trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ (ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$) tel que

$$(2.40)\quad \max_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} J(u, \bar{\omega}) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \max_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} J(v, \bar{\omega}) \overset{\text{def.}}{=} \bar{\delta}$$

où $\mathcal{P}_{tol}$ = convexe fermé borné de $\mathcal{P}$.

On sait (cf. résultats du chapitre II) que ce problème admet une solution unique u caractérisée par

$$(2.41)\quad \max_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}(u)} (Eu + F\bar{\omega} + \chi,\ E(v-u))_{\mathcal{H}} + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad},$$

où $\qquad u \in \mathcal{U}_{ad},$

$$(2.42)\quad \mathcal{P}(u) = \{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol} \,|\, J(u, \bar{\omega}) = \max_{w \in \mathcal{P}_{tol}} J(u, w)\}.$$

Nous utiliserons dans la suite la forme équivalente de (2.41) :

$$(2.43)\quad \begin{cases} \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ il existe } \bar{\omega}_v \in \mathcal{P}(u) \text{ tel que} \\ \qquad (Eu + F\bar{\omega}_v + \chi,\ E(v - u))_{\mathcal{H}} + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0\ . \end{cases}$$

Nous allons maintenant associer au problème exact, une suite de problèmes approchés en utilisant les méthodes de [8], [11].

Soient $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{H}$ deux ensembles d'indices pris dans des espaces de dimension finie. Soient $\mathcal{U}_\zeta$ et $\mathcal{P}_\eta$ deux suites d'espaces vectoriels de dimension finie ($\zeta \in \mathcal{Z}$, $\eta \in \mathcal{H}$), $q_\zeta \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_\zeta, \mathcal{U})$, $q_\eta \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_\eta, \mathcal{P})$ deux suites d'opérateurs linéaires continus, injectifs, stables ([2]).

On munit $\mathcal{U}_\zeta$ et $\mathcal{P}_\eta$ des normes respectives

(2.44) $\quad |u_\zeta|_\zeta = \|q_\zeta\, u_\zeta\|_{\mathcal{U}}\,, \quad |\bar{\omega}_\eta|_\eta = \|q_\eta\, \bar{\omega}\|_{\mathcal{P}}\,.$

Soit maintenant

E_ξ, F_ξ deux suites d'opérateurs linéaires continus

(2.45) $\quad E_\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \quad , \quad F_\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{H})$

où ξ parcourt un troisième ensemble d'indices Ξ pris dans un espace de dimension finie. On suppose

(2.46) $\quad |E_\xi|_{\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{H})} \leq \text{cte} \quad , \quad |F_\xi|_{\mathcal{L}(\mathcal{P},\mathcal{H})} \leq \text{cte} \quad , \quad \forall\, \xi \in \Xi,$

(2.47) $\begin{cases} \epsilon \text{ désignant le triplet } (\xi, \zeta, \eta), \text{ si } \epsilon \to 0, \text{ si } q_\zeta u_\epsilon \to u \\ \text{dans } \mathcal{U} \text{ faible, alors } E_\xi\, q_\zeta\, u_\epsilon \to E\, u \text{ dans } \mathcal{H} \text{ fort, si } q_\eta\, \bar{\omega}_\epsilon \to \bar{\omega} \\ \text{dans } \mathcal{P} \text{ faible, alors } F_\xi\, q_\eta\, \bar{\omega}_\epsilon \to F\, \bar{\omega} \text{ dans } \mathcal{H} \text{ fort.} \end{cases}$

K_ζ et K_η sont des convexes fermés de $\mathcal{U}_\zeta$, $\mathcal{P}_\eta$ définis par

(2.48) $\begin{cases} v_\zeta \in K_\zeta \text{ si et seulement si } q_\zeta v_\zeta \in \mathcal{U}_{ad} \\ \bar{\omega}_\eta \in K_\eta \text{ si et seulement si } q_\eta\, \bar{\omega}_\eta \in \mathcal{P}_{tol} \end{cases}$

et vérifiant

(2.49) $\begin{cases} \forall\, u \in \mathcal{U}_{ad}\,, \text{ il existe } \rho_\zeta\, u \in K_\zeta \text{ tel que } q_\zeta \rho_\zeta u \to u \text{ dans } \mathcal{U} \text{ fort,} \\ \forall\, \bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}, \text{ il existe } \rho_\eta\, \bar{\omega} \in K_\eta \text{ tel que } q_\eta \rho_\eta \bar{\omega} \to \bar{\omega} \text{ dans } \mathcal{P} \text{ fort.} \end{cases}$

Le problème approché est alors le suivant. Soit

(2.50) $\quad J_\epsilon(v_\zeta, \bar{\omega}_\eta) = \|E_\xi\, q_\zeta\, v_\zeta + F_\xi\, q_\eta\, \bar{\omega}_\eta + \chi_\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \nu |v_\zeta|^2_\zeta$

où χ_ξ est donné dans $\mathcal{H}$ et vérifie $\lim\limits_{\xi \to 0} \chi_\xi = \chi$.

On cherche $u_\epsilon \in K_\zeta$ tel que

(2.51) $\quad \max\limits_{\bar{\omega}_\eta \in K_\eta} J_\epsilon(u_\epsilon, \bar{\omega}_\eta) = \min\limits_{v_\zeta \in K_\zeta} \max\limits_{\bar{\omega}_\eta \in K_\eta} J_\epsilon(v_\zeta, \bar{\omega}_\eta)\,.$

Les résultats du chapitre II s'appliquent au problème approché grâce aux hypothèses de continuité et de linéarité sur les différents opérateurs introduits et grâce à la définition (2.48). Il existe donc un unique $u_\epsilon \in K_\zeta$ vérifiant (2.51) et il est caractérisé par

(2.52) $\quad \max\limits_{\bar{\omega}_\eta \in \mathcal{P}_\eta(u_\epsilon)} (E_\xi\, q_\zeta\, u_\epsilon + F_\xi\, q_\eta\, \bar{\omega}_\eta + \chi_\xi,\ E_\xi(q_\zeta v_\zeta - q_\zeta u_\epsilon))_{\mathcal{H}} + \nu(u_\epsilon, v_\zeta - u_\epsilon)_\zeta \leq$

$\forall\, v_\zeta \in K_\zeta,\ u_\zeta \in K_\zeta$

où

$$(2.53) \qquad \mathcal{P}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \{\bar{\omega}_\eta \in K_\eta \,|\, J_\varepsilon(u_\varepsilon, \bar{\omega}_\eta) = \max_{w_\eta \in K_\eta} J(u_\varepsilon, w_\eta)\}.$$

On utilisera dans la suite la forme équivalente de (2.52),

$$(2.54) \quad \begin{cases} \forall\, v_\zeta \in K_\zeta, \text{ il existe } \bar{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{P}_\eta(u_\varepsilon) \text{ tel que} \\ (E_\xi q_\zeta u_\varepsilon + F_\xi q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon + \chi_\xi, E_\xi q_\zeta(v_\zeta - u_\varepsilon))_{\mathcal{H}} + \nu(u_\varepsilon, v_\zeta - u_\varepsilon)_\zeta \geq 0 \end{cases}$$

<u>Théorème 2.4.</u>

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $q_\zeta u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{U}$ fort.

<u>démonstration.</u>

1°) $q_\zeta u_\varepsilon$ reste borné dans $\mathcal{U}$.

Soit v fixé dans $\mathcal{U}_{ad}$. D'après (2.49) il existe $\rho_\zeta v \in K_\zeta$ tel que $q_\zeta \rho_\zeta v \to v$ dans $\mathcal{U}$ fort. Prenons donc $v_\zeta = \rho_\zeta v$. d'après (2.54) il existe $\bar{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{P}_\eta(u_\varepsilon)$ tel que

$$(2.55) \quad \nu|q_\zeta u_\varepsilon|^2_{\mathcal{U}} \leq \nu|u_\varepsilon|^2_\zeta + |E_\xi q_\zeta u_\varepsilon|^2_{\mathcal{H}} \leq (E_\xi q_\zeta u_\varepsilon, E_\xi q_\zeta \rho_\zeta v)_{\mathcal{H}} + \nu(q_\zeta u_\varepsilon, q_\zeta \rho_\zeta v)_{\mathcal{U}} + \ldots$$
$$\ldots + (E_\xi q_\zeta(\rho_\zeta v - u_\varepsilon), F_\xi q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon + \chi_\xi)_{\mathcal{H}}.$$

Comme $q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{P}_{tol}$ qui est borné, on déduit de (2.55), d'après (2.46),

$$\nu|q_\zeta u_\varepsilon|^2_{\mathcal{U}} \leq C_1 |q_\zeta \mathcal{U}_\varepsilon|_{\mathcal{U}} + C_2$$

où C_1, C_2 sont des constantes positives. D'où le résultat.

2°) Convergence faible.

On peut extraire de $\{q_\zeta \mathcal{U}_\varepsilon\}$ une sous suite, notée de la même façon, qui converge faiblement vers $\tilde{u}$ et comme $q_\zeta u_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}$, $\tilde{u} \in \mathcal{U}_{ad}$.

Soit v fixé dans $\mathcal{U}_{ad}$. Dans (2.54) prenons $v_\zeta = \rho_\zeta v$. La suite $\bar{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{P}_\eta(u_\varepsilon)$ correspondante est telle que $q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon$ est dans un borné de $\mathcal{P}$. Par une deuxième extraction on peut donc supposer que $q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon$ tend faiblement vers $\bar{\omega}_v \in \mathcal{P}_{tol}$.

D'après (2.47) on peut passer à la limite dans l'inégalité (2.54).

On obtient

$$(2.56) \quad (E\tilde{u} + F\bar{\omega}_v + \chi, E(v - \tilde{u}))_{\mathcal{H}} + \nu(\tilde{u}, v - \tilde{u})_{\mathcal{U}} \geq 0.$$

Montrons que $\bar{\omega}_v \in \mathcal{P}(\tilde{u})$: $\bar{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{P}_\eta(u_\varepsilon)$ se traduit par

$$(2.57) \qquad J_\varepsilon(u_\varepsilon, \bar{\omega}_\varepsilon) \geq J_\varepsilon(u_\varepsilon, \bar{\omega}_\eta) \quad \forall\, \bar{\omega}_\eta \in K_\eta.$$

Soit $\bar{\omega}$ quelconque dans $\mathcal{P}_{tol}$. Dans (2.57) prenons $\bar{\omega}_\eta = \rho_\eta \bar{\omega}$. On peut alors passer à la limite dans (2.57). On a

(2.58) $\quad J(\tilde{u}, \bar{\omega}_v) \geq J(\tilde{u}, \bar{\omega})$

et comme $\bar{\omega}$ est arbitraire ceci montre que $\bar{\omega}_v \in \mathcal{P}(\tilde{u})$.
Par conséquent $\tilde{u}$ est solution du problème exact et donc $\tilde{u} = u$. La suite entière $q_\zeta u_\varepsilon$ tend faiblement vers u.

3°) Convergence forte.

Dans (2.54) prenons $v_\zeta = \rho_\zeta u$. Soit $\bar{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{P}_\eta(u_\varepsilon)$ la suite correspondante. On a

$$\nu|u_\varepsilon - \rho_\zeta u|_\zeta^2 \leq \nu(u_\varepsilon - \rho_\zeta u, u_\varepsilon - \rho_\zeta u)_\zeta + (E_\xi q_\zeta(u_\varepsilon - \rho_\zeta u), E_\xi q_\zeta(u_\varepsilon - \rho_\zeta u))_{\mathcal{H}}$$

$$\leq (E_\xi q_\zeta(\rho_\zeta u - u_\varepsilon), F_\xi q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon + \chi_\xi)_{\mathcal{H}} - \nu(\rho_\zeta u, u_\varepsilon - \rho_\zeta u)_\zeta + \ldots$$

$$\ldots - (E_\xi q_\zeta \rho_\zeta u, E_\xi q_\zeta(u_\varepsilon - \rho_\zeta u))_{\mathcal{H}}$$

et le dernier membre tend vers 0 grâce au résultat de convergence faible, à l'hypothèse (2.47) et parce que $F_\xi q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon + \chi_\xi$ reste borné. Donc $\|q_\zeta u_\varepsilon - q_\zeta \rho_\zeta u\|_{\mathcal{U}}$ tend vers 0. On en déduit immédiatement que $q_\zeta u_\varepsilon$ tend fortement vers u.

<u>Corollaire 2.1.</u>

Posons $\delta_\varepsilon = \max_{\bar{\omega}_\eta \in K_\eta} J_\varepsilon(u_\varepsilon, \bar{\omega}_\eta)$. Alors $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = \bar{\delta}$.

<u>démonstration.</u>

Le point 2° de la démonstration du théorème 2.4 a montré que quelque soit la suite extraite de δ_ε on peut extraire une suite qui converge vers $\bar{\delta}$ (passage de (2.57) à (2.58)). $\bar{\delta}$ est donc l'unique valeur d'adhérence de la suite δ_ε. Or δ_ε est minorée (par zéro) et majorée. En effet, il existe $\bar{\omega}_\varepsilon \in K_\eta$ tel que

$$\delta_\varepsilon = J_\varepsilon(u_\varepsilon, \bar{\omega}_\varepsilon) = \|E_\xi q_\zeta u_\varepsilon + F_\xi q_\eta \bar{\omega}_\varepsilon + \chi_\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \nu\|q_\zeta u_\varepsilon\|_{\mathcal{U}}^2$$

ceci montre, d'après (2.46) et les hypothèses de stabilité sur q_ζ, q_η, que $J_\varepsilon(u_\varepsilon, \bar{\omega}_\varepsilon)$ est uniformément majoré puisque u_ε et $\bar{\omega}_\varepsilon$ sont bornées.

<u>Remarque 2.1.</u>

Bien que dans ce § 2 on se soit limité aux équations de type parabolique on traiterait de la même façon le cas des systèmes gouvernés par des équations

elliptiques. L'espace des états est alors V et pour que la théorie générale du chapitre II s'applique on doit essentiellement choisir l'espace des observations $\mathcal{H}$ tel que l'opérateur $C \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$ soit compact. Par exemple si $V = H_0^1(\Omega)$ on pourra prendre $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, si $V = H^1(\Omega)$ on pourra prendre $\mathcal{H} = L^2(\Gamma)$.

Remarque 2.2.

L'application aux problèmes elliptiques ou paraboliques de la méthode d'approximation ci-dessus consiste à choisir des schémas de discrétisation satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.4. Les schémas exposés dans [8] sont valables ici. Le seul point différent est le choix de E_ξ, F_ξ pour que (2.47) (hypothèse plus forte que dans [8]) soit réalisée. Le paramètre ξ correspondant à la discrétisation de l'équation d'état (cf. [8]), on pourra, dans le cas elliptique par exemple, considérer des approximations internes (p_ξ, r_ξ, V, V_ξ) de V (cf. [12]) et prendre

$$E_\xi u + F_\xi \bar{\omega} = C\, p_\xi\, y_\xi (u, \bar{\omega}),$$

où $y_\xi(u, \bar{\omega}) \in V_\xi$ désigne la solution de l'équation d'état discrétisée. Si $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ ou $\mathcal{H} = L^2(\Gamma)$, C est connu explicitement.

Comme dans le cas d'un problème avec point de selle (cf. n° 8.4 du chap. III), on peut réduire le problème approché au Pb 1 pour une fonction d'un nombre fini de variables réelles et appliquer ensuite l'un des algorithmes du chapitre II. Pour plus de détails, nous renvoyons à [60].

§ 3 - systèmes perturbés. Problème de temps optimal.

On considère le système dont l'état est donné par

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, y(t\ ;\ u, \bar{\omega}) + A(t) y(t\ ;\ v, \bar{\omega}) = Bv + \mathcal{C}(\bar{\omega}) \\ \qquad\qquad y(0\ ;\ v, \bar{\omega}) = y_0 \end{cases}$$

avec les mêmes notations et hypothèses qu'au n°2.1.
Soit $\mathcal{U}_{ad}$ donné dans $\mathcal{U}$, ensemble convexe fermé, $\mathcal{P}_{tol}$ sous ensemble quelconque de $\mathcal{P}$ et soit y_1 donné dans H.

Définition 3.1.

(i) Soit $\varepsilon \geq 0$, $v \in \mathcal{U}_{ad}$ est dit ε-admissible si quel que soit $\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}$, il existe $\tau \in [0, T]$ (T fini) tel que

(3.2) $\quad |y(\tau\ ;\ v,\ \bar{\omega}) - y_1|_H \leq \varepsilon.$

(ii) On désigne par $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$, l'ensemble des v qui sont ε-admissibles.

(iii) Pour $v \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ (en supposant $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad} \neq \emptyset$) et $\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}$, on pose

(3.3) $\quad \tau(v,\ \bar{\omega}) = \min \tau$ tel que (3.2) ait lieu; ceci a un sens car $\tau \to y(\tau;\ v,$
est continue de $[0,\ T]$ dans H.

Définition 3.2.

Selon VARAYIA [64], pour $v \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ on pose

(3.4) $$\tau(v) = \sup_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \tau(v,\ \bar{\omega})$$

(3.5) $$\tau^* = \inf_{v \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}} \tau(v) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \sup_{\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}} \tau(v,\ \bar{\omega})$$

On remarque que, quel que soit $v \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$, $0 \leq \tau(v) \leq T$ et donc $0 \leq \tau^* \leq T$
τ^* est dit temps optimal.

On va étudier le problème de l'existence d'un contrôle optimal, i.e existence de $u \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ tel que

(3.6) $$|y(\tau^*,\ u,\ \bar{\omega}) - y_1|_H \leq \varepsilon\ ,\quad \forall\ \bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}\ ;$$

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses standard pour (3.1), si l'ensemble $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ est non vide et si $\mathcal{U}_{ad}$ est borné, alors il existe un contrôle optimal, i.e $u \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ tel que (3.6) ait lieu.

démonstration.

On utilise les méthodes de LIONS ([43], chap. 3, n°17.2) et de VARAYIA [6

1°) $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ est faiblement séquentiellement compact dans $\mathcal{U}$. En effet,

$\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad} \subset \mathcal{U}$ est borné. Montrons qu'il est faiblement séquentiellement fermé.
Soit $v_n \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ une suite qui converge faiblement vers v. Alors $v \in \mathcal{U}_{ad}$.
Soit $\bar{\omega}$ fixé dans $\mathcal{P}_{tol}$. Il existe $\tau_n \in [0,\ T]$ tel que

(3.7) $\quad |y(\tau_n\ ;\ v_n,\ \bar{\omega}) - y_1|_H \leq \varepsilon\ .$

Par extraction éventuelle on peut toujours supposer que

$\tau_n \to \tau \in [0,\ T].$

Posons $y_n = y(v_n, \bar{\omega})$. $\mathcal{U}_{ad}$ borné implique y_n(resp. y'_n) demeure dans un borné de $L^2(0, T ; V)$ (resp. $L^2(0, T ; V')$). On peut donc extraire une suite encore notée $\{v_n, y_n\}$ telle que

$$(3.8) \quad \begin{cases} v_n \to v \text{ dans } \mathcal{U} \text{ faible} \\ y_n(\text{resp. } y'_n) \to y(\text{resp. } y') \text{ dans } L^2(0, T ; V) \text{ (resp. } L^2(0, T ; V')) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{faible.} \end{cases}$$

De

$$\begin{cases} y'_n + A(t)y_n = B\, v_n + \mathcal{C}(\bar{\omega}) \\ y_n(0) = y_o \end{cases}$$

on déduit

$$\begin{cases} y' + A(t)y = Bv + \mathcal{C}(\bar{\omega}) \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

et donc $y = y(v, \bar{\omega})$. Mais

$$y(\tau_n ; v_n, \bar{\omega}) - y(\tau ; v, \bar{\omega}) = y(\tau_n ; v_n, \bar{\omega}) - y(\tau ; v_n, \bar{\omega}) + y(\tau ; v_n, \bar{\omega}) - y(\tau ; v, \bar{\omega})$$

Or $y(\tau ; v_n, \bar{\omega}) \to y(\tau ; v, \bar{\omega})$ dans H faible d'après (3.8) et

$$\|y(\tau_n ; v_n, \bar{\omega}) - y(\tau ; v_n, \bar{\omega})\|_{V'} = \| \int_\tau^{\tau_n} y'(t ; v_n, \bar{\omega})dt\|_{V'} \leq$$

$$\leq |\tau_n - \tau|^{\frac{1}{2}}(\int_\tau^{\tau_n}\|y'(t ; v_n, \bar{\omega})\|^2_{V'}\, dt)^{\frac{1}{2}} \leq C|\tau_n - \tau|^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $y(\tau_n ; v_n, \bar{\omega}) - y(\tau; v_n, \bar{\omega}) \to 0$ dans V' fort donc dans V' faible donc dans H faible car V est dense dans H et $y(\tau_n; v_n, \bar{\omega}) - y(\tau; v_n, \bar{\omega}) \in H$. Donc $y(\tau_n ; v_n, \bar{\omega})$ tend vers $y(\tau ; v, \bar{\omega})$ dans H faible. Comme la boule fermée de centre y_1 et de rayon ε est faiblement fermée, on déduit de (3.7) que $v \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$.

2°) La fonction $v \to \tau(v, \bar{\omega})$ est, quelque soit $\bar{\omega} \in \mathcal{P}_{tol}$, s.c.i. de $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ dans $[0, T]$ pour la pseudo-topologie de la convergence faible de $\mathcal{U}$, i.e. En effet,

$$\begin{cases} \text{si } v_n \to v \text{ faiblement dans } \mathcal{U} \text{ alors} \\ \tau(v, \bar{\omega}) \leq \liminf \tau(v_n, \bar{\omega}) . \end{cases}$$

Soit $\bar{\omega}$ fixé dans $\mathcal{P}_{tol}$. On remarque d'abord que, si $v_n \to v$ faiblement alors $v \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$ et $\tau(v, \bar{\omega})$ est défini. Par définition, $\tau(v_n, \bar{\omega}) = \tau_n = \min \tau$ tel que (3.2) ait lieu avec $v = v_n$.

Soit $\tilde{\tau} = \liminf \tau_n$. Alors $0 \leq \tilde{\tau} \leq T$ et il existe une sous-suite τ_ν

qui tend vers $\tilde{\tau}$. Les mêmes raisonnements qu'au 1° montrent que

$$|y(\tilde{\tau} \; ; \; v, \; \bar{\omega}) - y_1|_H \leq \varepsilon$$

et donc $\tau(v, \bar{\omega}) \leq \tilde{\tau}$.

3°) La fonction $v \to \tau(v)$ est s.c.i. comme enveloppe supérieure d'une famille de fonctions s.c.i. (pour la convergence faible) et donc atteint sa borne inférieure sur le compact séquentiel faible $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{ad}$.

Remarque 3.1.

Le théorème 3.1 est valable si, pour définir $\tau(v, \bar{\omega})$, on considère un convexe fermé quelconque au lieu de la boule de centre y_1 et de rayon ε et, plus généralement, un sous-ensemble faiblement fermé de H.

Chapitre V

APPLICATIONS NUMERIQUES

Nous présentons dans ce chapitre quelques expériences numériques relatives aux chapitres III et IV. Les problèmes étudiés dans ces chapitres conduisent en général à des calculs portant sur un grand nombre de variables numériques. Aussi nous sommes-nous limité à des exemples très simples mettant en jeu des problèmes aux limites elliptiques en dimension d'espace un ou deux (avec dans ce cas une discrétisation grossière).

La programmation a été réalisée en ALGOL sur l'IBM 360-75 du CIRCE à Orsay par A.JAKUBOWICZ et P. LEMONNIER.

---

§ 1 - Exemple 1.

On se place dans le cadre du n°2.1 du chapitre III avec $\Omega =]0, 1[$ et $A = -\Delta + I$.

Le système à contrôler est défini par

$$(1.1) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = f + v_1 + v_2 \quad \text{sur} \quad]0, 1[\\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

avec $v_1, v_2 \in L^2(0, 1)$ $(= \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2)$, $f \in L^2(0, 1)$.

Le critère est donné par

$$(1.2) \qquad J(v_1, v_2) = \int_0^1 |y(v_1, v_2) - z_d(x)|^2 \, dx + \nu_1 \int_0^1 |v_1(x)|^2 dx - \nu_2 \int_0^1 |v_2(x)|^2 dx.$$

où z_d est donné dans $L^2(0, 1)$.

Soit $\mathcal{U}^1_{ad}$ (resp. $\mathcal{U}^2_{ad}$) un convexe fermé de $L^2(0, 1)$. Le critère (1.2) admet un point de selle unique sur $\mathcal{U}^1_{ad} \times \mathcal{U}^2_{ad}$ si on suppose $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > 1 (= \frac{1}{\alpha^2})$.

On prend

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \nu_1 = 1 \ , \ \nu_2 = 2, \\ f(x) = (4\pi^2 + 1) \sin 2\pi x + 10\, x(1 - x), \\ z_d(x) = \sin 2\pi x - 20\, x(1 - x) - 40, \\ \mathcal{U}^1_{ad} = \mathcal{U}^2_{ad} = L^2(0, 1). \end{cases}$$

La solution est alors donnée par

$$(1.4) \qquad \begin{cases} u_1(x) = 20\, x(x - 1) \\ u_2(x) = 10\, x(1 - x) \\ J_{opt} = J(u_1, u_2) = \frac{7}{6} . \ 1600 + 20 \ \# \ 1886, 666... \end{cases}$$

En fait, pour construire cet exemple, on a, par un procédé classique, utilisé la caractérisation (2.15), (2.16) chap.III, en se donnant a priori y et p dans $H^1_0(0, 1)$, soit

$$y(x) = \sin 2\pi x,$$

$$p(x) = 20\, x(1 - x),$$

et en en déduisant f et z_d.

La méthode itérative du n°7.2 du chapitre I est alors simple à mettre en oeuvre. D'après la caractérisation (1.21)(1.22) chap.III et la définition de l'état adjoint p, les formules (7.18)(7.19) chap.I s'écrivent

$$(1.5)\quad \begin{cases} u_1^{m+1} = P_1(u_1^m - \rho(p(u_1^m, u_2^m) + \nu_1 u_1^m)) \\ u_2^{m+1} = P_2(u_2^m + \rho(p(u_1^m, u_2^m) - \nu_2 u_2^m)) \end{cases}$$

avec $P_1 = P_2 =$ identité.

Pour un ρ convenable la suite (1.5) converge dans $L^2(0, 1)^2$ vers le point de selle, quel que soit (u_1^o, u_2^o). L'utilisation des formules (7.28)(7.30) chap.I donne ici l'estimation.

$$(1.6)\qquad \rho_{opt} \geq \frac{1}{10}.$$

A chaque itération on doit résoudre successivement les deux problèmes aux limites.

$$(1.7)\qquad \begin{cases} -y'' + y = f + u_1^m + u_2^m, & y(0) = y(1) = 0, \\ -p'' + p = y - z_d, & p(0) = p(1) = 0. \end{cases}$$

La mise en oeuvre effective de la méthode a été obtenue en approchant $L^2(0, 1)$ par l'espace des fonctions en escalier sur un partage de l'intervalle $]0, 1[$ en N sous-intervalles de longueur $h = \frac{1}{N}$ et en approchant les problèmes (1.6) par les différences finies de pas h, les systèmes linéaires associés étant résolus par la méthode de relaxation successive avec paramètre optimum et en prenant comme vecteur initial le vecteur final de l'itération précédente de la méthode globale.

Plusieurs essais ont d'abord été effectués avec $h = 1/20$ et différentes valeurs de ρ. Sur la figure 1 on a tracé les courbes donnant $J_h(u_{1h}^m, u_{2h}^m)$ (fonctionnelle discrétisée) en fonction des itérations m pour $\rho = \frac{1}{15}$, 0.1, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. On constate :

1°) La suite converge vers le nombre 1886 qui est la valeur de la fonctionnelle discrétisée calculée à partir de la solution exacte discrétisée.

2°) Parmi ces différentes valeurs de ρ, la convergence semble la plus rapide pour $\rho = 0.6$.

3°) Un phénomène d'oscillation amortie apparaît à partir de $\rho = 0.7$, deux valeurs consécutives encadrant la limite, et s'amplifie lorsque ρ croît. Ceci peut s'expliquer en termes "géographiques" pour la surface $z = J_h(v_{1h}, v_{2h})$ suivant la valeur de ρ, on descend d'une montagne vers le col ou on se dirige vers le col en passant alternativement d'une montagne à une vallée.

En ce qui concerne les suites u_{1h}^m et u_{2h}^m on a dressé le tableau suivant où ϵ_k désigne l'erreur quadratique relative discrète définie par

$$\epsilon_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} |u_{khi}^m - u_k(ih)|^2}{\sum_{i=1}^{N} |u_k(ih)|^2} \quad , \; k = 1,2.$$

	ρ	1/15	0.1	0.6	0.7	0.8	0.9	1
m = 18	ϵ_1	0.3	0.17	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	ϵ_2	0.02	0.004	0.05	0.05	0.05	0.06	0.3
m = 28	ϵ_1	0.2	0.05			0.1	0.1	0.1
	ϵ_2	0.004	0.0002			0.05	0.05	0.2

Ce tableau montre la variation des erreurs ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de ρ pour $m = 18$ et $m = 28$. On constate

1°) L'erreur ϵ_2 est toujours plus faible que ϵ_1. Ceci est d'ailleurs vérifié non seulement pour $m = 18$ ou 28 mais quel que soit m et semble indiquer que la suite u_{2h}^m converge plus vite que u_{1h}^m.

2°) Les erreurs sont minima pour $\rho = 0.1$, ce qui semble confirmer l'estimation théorique (1.6).

3°) Pour les dernières valeurs de ρ il n'y a pas de différence sensible entre $m = 18$ et $m = 28$ (les deux suites convergent lentement) alors que pour $\rho = 0.1$ il y a une nette amélioration de $m = 18$ à $m = 28$ ce qui rejoint la constatation 2°).

Dans une deuxième série d'essais on a pris des valeurs différentes de ρ pour les itérations sur $u_1(\rho_1)$ et pour les itérations sur $u_2(\rho_2)$. Sur la figure 2 on a tracé les courbes de variation des $J_h(u_{1h}^m, u_{2h}^m)$ en fonction de m pour les couples

$$(\rho_1, \rho_2) = (1 \; , \; 0.9), \; (1.5, \; 0.9), \; (1.7, \; 0.9).$$

On a toujours le phénomène d'oscillation. La convergence est la plus rapide pour le couple (1.7, 0.9).

Pour les suites u_{1h}^m et u_{2h}^m on a le tableau suivant

	(ρ_1, ρ_2)	(1,0.9)	(1.5,0.9)	(1.7,0.9)
m = 18	ε_1	6.10^{-5}	2.10^{-3}	2.10^{-4}
	ε_2	5.10^{-3}	7.10^{-3}	5.10^{-3}
m = 28	ε_1	5.10^{-5}	5.10^{-5}	4.10^{-5}
	ε_2	8.10^{-4}	7.10^{-4}	5.10^{-4}
m = 68	ε_1		5.10^{-5}	4.10^{-5}
	ε_2		2.10^{-5}	2.10^{-5}

Ce tableau semble montrer qu'on obtient, pour une même itération, des résultats plus précis que lors des essais à ρ commun $(\rho_1 = \rho_2)$ précédents. D'autre part, ici c'est la suite u_{1h}^m qui converge plus vite que u_{2h}^m contrairement aux essais précédents.

L'écriture du programme ayant été améliorée entre les deux séries d'essais, donnons le temps de calcul pour $\rho_1 = 1.5$, $\rho_2 = 0.9$: 50 secondes d'exécution (après compilation) pour 68 itérations de la méthode.

§ 2 - <u>Exemple 2.</u>

On se place dans le même cadre qu'à l'exemple 1 en prenant toutefois $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$. Les nouvelles données sont

$$(2.1)\quad \begin{cases} \nu_1 = 1\ , \quad \nu_2 = 10\ , \\ f(x) = \begin{cases} -2 - \dfrac{1}{10}\sin 2\pi x & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ -2 + \sin 2\pi x & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \\ z_d(x) = x(x-1) - 4\pi^2 \sin 2\pi x \\ \mathcal{U}_{ad}^1 = \mathcal{U}_{ad}^2 = \{v \in L^2(0,1),\ v(x) \ge 0 \ \text{ pp. sur } (0,1)\} \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$(2.2)\quad \begin{cases} u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ -\sin 2\pi x & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases} \\ u_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\sin 2\pi x & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases} \\ J_{opt} = J(u_1, u_2) = 8\,\Pi^4 + \frac{9}{40} \# 779,4977. \end{cases}$$

Pour construire cet exemple on a procédé comme pour l'exemple 1 en utilisant la caractérisation (2.32) chap.III en se donnant a priori

$y(x) = x(x-1)$ et $p(x) = \sin 2\pi x$

et alors

$$u_1 = (-p)^+ \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{p^+}{10} \cdot$$

On a fait deux essais en utilisant

a) (1° méthode), la méthode de l'exemple 1 avec $h = 1/20$ et $\rho_1 \neq \rho_2$ déterminés à l'aide de la remarque heuristique suivante due à P.LEMONNIER : les itérations s'écrivant

$$(2.3)\quad \begin{cases} u_1^{m+1} = P_1(u_1^m - \rho_1(p(u_1^m, u_2^m) + \nu_1 u_1^m)), \\ u_2^{m+1} = P_2(u_2^m + \rho_2(p(u_1^m, u_2^m) - \nu_2 u_2^m)), \end{cases}$$

on calcule ρ_1 et ρ_2 en considérant que $p(u_1^m, u_2^m)$ diffère peu de $p(u_1, u_2)$ ce qui est vrai au bout de quelques itérations. On trouve alors

$$\rho_1 < \frac{2}{\nu_1} (= 2) \quad , \quad \rho_2 < \frac{2}{\nu_2} (= 1) \cdot$$

Pour l'essai on a pris $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.15$,

b) (2° méthode), la méthode de discrétisation a priori du n°8, chap.III en approchant $L^2(0, 1)$ comme en a) ce qui donne $\mathcal{U}_{\zeta_1} (= \mathcal{U}_{\zeta_2})$ et en prenant comme base (cf. n°8.4, ch. III), les fonctions caractéristiques des intervalles partageant $]0, 1[$. On est donc conduit à chercher le point de selle d'une fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N$, avec $N = 20$. On a appliqué la méthode itérative du chapitre I avec $\rho_1 = 2.85$, $\rho_2 = 1.5$, après avoir calculé les coefficients de $\phi(\beta_1, \beta_2)$ comme indiqué au n°8.4 chap. III.

La figure 3 montre les variations du critère calculé en fonction des itérations. Pour les deux méthodes la convergence est rapide. Les résultats numériques montrent qu'en 10 itérations on obtient une précision relative de 10^{-7}.

Le tableau suivant donne la précision sur les contrôles

		1° méthode	2° méthode
m = 10	ε_1	8.10^{-3}	3.10^{-2}
	ε_2	10^{-2}	10^{-2}
m = 20	ε_1	8.10^{-3}	8.10^{-3}
	ε_2	10^{-2}	8.10^{-3}

Dans les deux cas, la précision est moins bonne que sur le critère et sensiblement la même pour les deux contrôles. Cette précision ne varie pas sensiblement de $m = 10$ à $m = 20$. Nous verrons sur l'exemple suivant, qu'en poussant les itérations assez loin on obtient une nette amélioration.

En 15 secondes la première méthode a donné 20 itérations alors que dans la deuxième méthode, les calculs des coefficients de ϕ et 38 itérations de l'algorithme appliqué à ϕ a demandé 28 secondes. Par la deuxième méthode, on résout a priori N problèmes aux limites alors que par la première méthode on en résout deux à chaque itération m. Même si la méthode de relaxation successive ne nécessite que quelques itérations internes grâce au choix du vecteur initial (cf. exemple 1), la deuxième méthode est plus avantageuse en temps dès que m est grand.

§ 3 - Exemple 3.

Le cadre est le même qu'à l'exemple 2 avec les données

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \nu_1 = 1\ ,\ \nu_2 = 10\ , \\ f(x) = \dfrac{9}{10}\, x(x-1) - 4, \\ z_d(x) = 2x(x-1) + 2\ , \\ \mathcal{U}^1_{ad} = \mathcal{U}^2_{ad} = L^2(0,\ 1). \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$(3.2)\qquad \begin{cases} u_1(x) = x - x^2\ , \\ u_2(x) = \dfrac{1}{10}\,(x^2 - x)\ , \\ J_{opt} = J(u_1,\ u_2) = 4.03. \end{cases}$$

L'exemple est construit en partant de

$$y(x) = 2(x^2 - x) \quad , \quad p(x) = x^2 - x \ .$$

On a fait deux séries d'essais par la première méthode (cf. a) de l'exemple 2) avec $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.15$, la première en faisant varier h $(\frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{60}, \frac{1}{100})$, la deuxième à h fixé $(= \frac{1}{20})$ en poussant les itérations jusqu'à $m = 365$ (ce qui a demandé 1mn 01 seconde de temps de calcul. Les résultats montrent que le fait d'affiner la discrétisation n'améliore la précision ni sur le critère ni sur les contrôles. Par exemple pour le critère on a la variation suivante de l'erreur relative.

h	1/20	1/40	1/60	1/100
$m = 11$	$\frac{5}{4}\ 10^{-4}$	$\frac{5}{4}\ 10^{-4}$	$\frac{5}{4}\ 10^{-4}$	$\frac{5}{4}\ 10^{-4}$
$m = 23$	10^{-7}		$\frac{1}{4}\ 10^{-5}$	$\frac{3}{4}\ 10^{-5}$

Par contre, à h fixé et en 32 itérations, on arrive à une précision de 10^{-8} sur le critère, celle-ci ne s'améliorant plus jusqu'à $m = 365$. Les contrôles approchés coïncident avec la solution exacte en chaque point du partage de $]0, 1[$ sur 15 chiffres significatifs soit avec une erreur quadratique relative de $1.7\ 10^{-15}$, pour $m = 114$, la précision ne s'améliorant plus ensuite.

§ 4 - <u>Exemple 4.</u>

$\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$. L'équation d'état :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} -\Delta y = f + v_1 + v_2 & \text{sur } \Omega \ , \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \end{cases}$$

le critère :

$$(4.2) \qquad J(v_1, v_2) = \int_\Omega |y(v_1, v_2) - z_d|^2 \, dx + \nu_1 \int_\Omega |v_1|^2 \, dx - \nu_2 \int_\Omega |v_2|^2 \, dx.$$

avec les données :

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \nu_1 = 1 \ , \quad \nu_2 = 10 \ , \\ f(x) = -4[x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)] + \frac{9}{10} x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ z_d(x) = 2x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) + 2[x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)] \\ \mathcal{U}^1_{ad} = \mathcal{U}^2_{ad} = L^2(\Omega). \end{cases}$$

La solution est alors

$$(4.4)\quad \begin{cases} u_1(x) = -\, x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ u_2(x) = \frac{1}{10}\, x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ J_{opt} = J(u_1, u_2) = 0.48988\ldots \end{cases}$$

La méthode employée est la même qu'à l'exemple 2(a). L'espace $L^2(\Omega)$ a été approché par l'espace des fonctions en escalier sur un partage de Ω en N^2 carrés de côté $h = \frac{1}{N}$. Les résultats obtenus pour $h = 0.1$ et $0,2$ (avec $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.15$ dans les deux cas) sont les suivants.

<u>h = 0.1.</u> La suite des valeurs de la fonctionnelle croît pendant les cinq premières itérations puis oscille autour de 0,4854 (valeur de la fonctionnelle au point de selle exact calculée par la procédure d'intégration discrète), valeur atteinte à la 9ème itérations en 52 secondes.

<u>h = 0.2.</u> La valeur calculée au point de selle exact est 0,4887, atteinte en 12 itérations. La suite est croissante pendant les 5 premières itérations puis oscillante. Temps de calcul : 7 mn 54 s. pour 33 itérations.

En ce qui concerne les contrôles, on constate

1°) pour une même itération, la précision sur u_1 est meilleure pour $h = 0,2$ et la même sur u_2 pour $h = 0,1$ ou $0,2$;

2°) la précision est constante sur u_1 (à partir de $m = 5$ pour $h = 0,1$ et à partir de $m = 7$ pour $h = 0,2$) et s'améliore régulièrement sur u_2.

Le tableau suivant donne l'erreur quadratique absolue discrète sur les contrôles en fonction des itérations m et de h.

	h = 0,1		h = 0,2	
m	u_1^m	u_2^m	u_1^m	u_2^m
1	2.10^{-5}	2.10^{-1}	2.10^{-5}	2.10^{-1}
3	3.10^{-7}	1.10^{-2}	2.10^{-7}	1.10^{-2}
5	2.10^{-7}	8.10^{-4}	2.10^{-8}	8.10^{-4}
7	2.10^{-7}	5.10^{-5}	5.10^{-9}	5.10^{-5}
9	2.10^{-7}	3.10^{-6}	5.10^{-9}	3.10^{-6}
14			5.10^{-9}	3.10^{-9}
33			5.10^{-9}	5.10^{-11}

§ 5 - Exemple 5.

Cet exemple est relatif à un problème de contrôle perturbé du type étudié au chapitre IV, pour un système gouverné par le problème elliptique suivant :

$$\Omega =]0, 1[\quad ,$$

$$(5.1) \qquad \begin{cases} -y'' = f + v + \bar{\omega} \\ y \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$v \in \mathcal{U} = L^2(0,1) \qquad \bar{\omega} \in \mathcal{P} = L^2(0,1)$$

$$\mathcal{P}_{tol} = \{\bar{\omega} \in L^2(0,1), \quad 0 \leq \bar{\omega}(x) \leq 1 \text{ pp.}\}$$

$$\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U} \ .$$

Le critère est

$$(5.2) \qquad J(v, \bar{\omega}) = \int_0^1 |y(v, \bar{\omega}) - z_d|^2 \, dx + \nu \int_0^1 |v(x)|^2 \, dx \ .$$

La condition nécessaire et suffisante donnée au chapitre IV ne permet pas de construire un exemple comme dans les problèmes de point de selle. Pour l'expérience numérique, on a pris les données de l'exemple 3 (f, z_d) et $\nu = 1$. On obtient un exemple qui est "presque" celui du n°3 précédent. La différence est dans le critère, ici il manque le terme en $\bar{\omega}$ (qui correspondrait à u_2). Les résultats numériques sont d'ailleurs, dans un certain sens, voisins.

On a utilisé la méthode de discrétisation a priori indiquée au n°2.5 chap.III et remarque 2.2, et appliqué ensuite l'algorithme décrit au n°3.5 chap. II. On résout donc

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^N} \ \max_{\substack{\gamma \in \mathbb{R}^N \\ 0 \leq \gamma_i \leq 1}} \ \phi(\beta, \gamma)$$

en construisant la suite β^m comme suit :

a) $\beta^m \to \gamma^m$ par

$$\phi(\beta^m, \gamma^m) = \max_{\substack{0 \leq \gamma_i \leq 1 \\ i=1,N}} \phi(\beta^m, \gamma)$$

b) $\beta^{m+1} = \beta^m - \rho \dfrac{\partial \phi}{\partial \beta} (\beta^m, \gamma^m)$ avec $\rho > 0$.

Comme ϕ est une forme quadratique en γ, on a utilisé la remarque 2.4 du chap. II pour le calcul de γ^m par a) puisque γ appartient à l'hypercube $[0, 1]^N$.

La figure 4 qui donne les variations du critère calculé, en fonction des itérations, montre une convergence très rapide en quelques itérations vers une valeur limite voisine de la valeur optimale de l'exemple 3. Le temps de calcul est assez long, 4 mn pour 17 itérations car à chaque itération on doit tester tous les sommets $\{0,1\}^N$ pour trouver γ^m. Pour l'essai on a pris $N = 10$.

§ 5 - Conclusion.

Les exemples présentés dans ce chapitre permettent d'illustrer quelques méthodes étudiées dans les chapitres précédents et ne prétendent pas en juger la valeur. On trouvera, dans [31], [42], d'autres exemples mettant en jeu notamment un problème de Neumann avec contrôles frontière et distribué, ou un problème d'évolution pour des jeux différentiels étudiés au chapitre III, et dans [60] d'autres exemples de problèmes de contrôle perturbés.

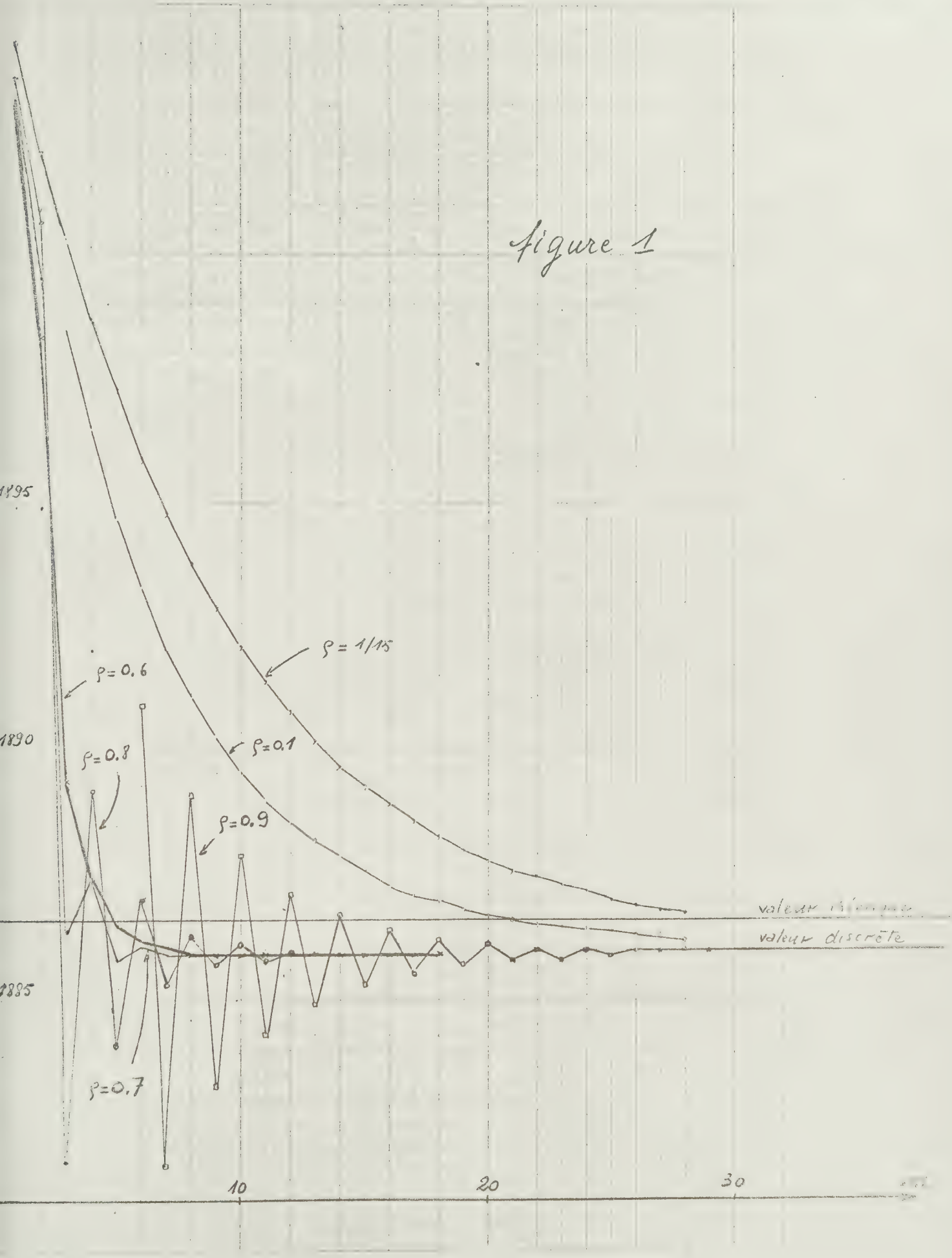
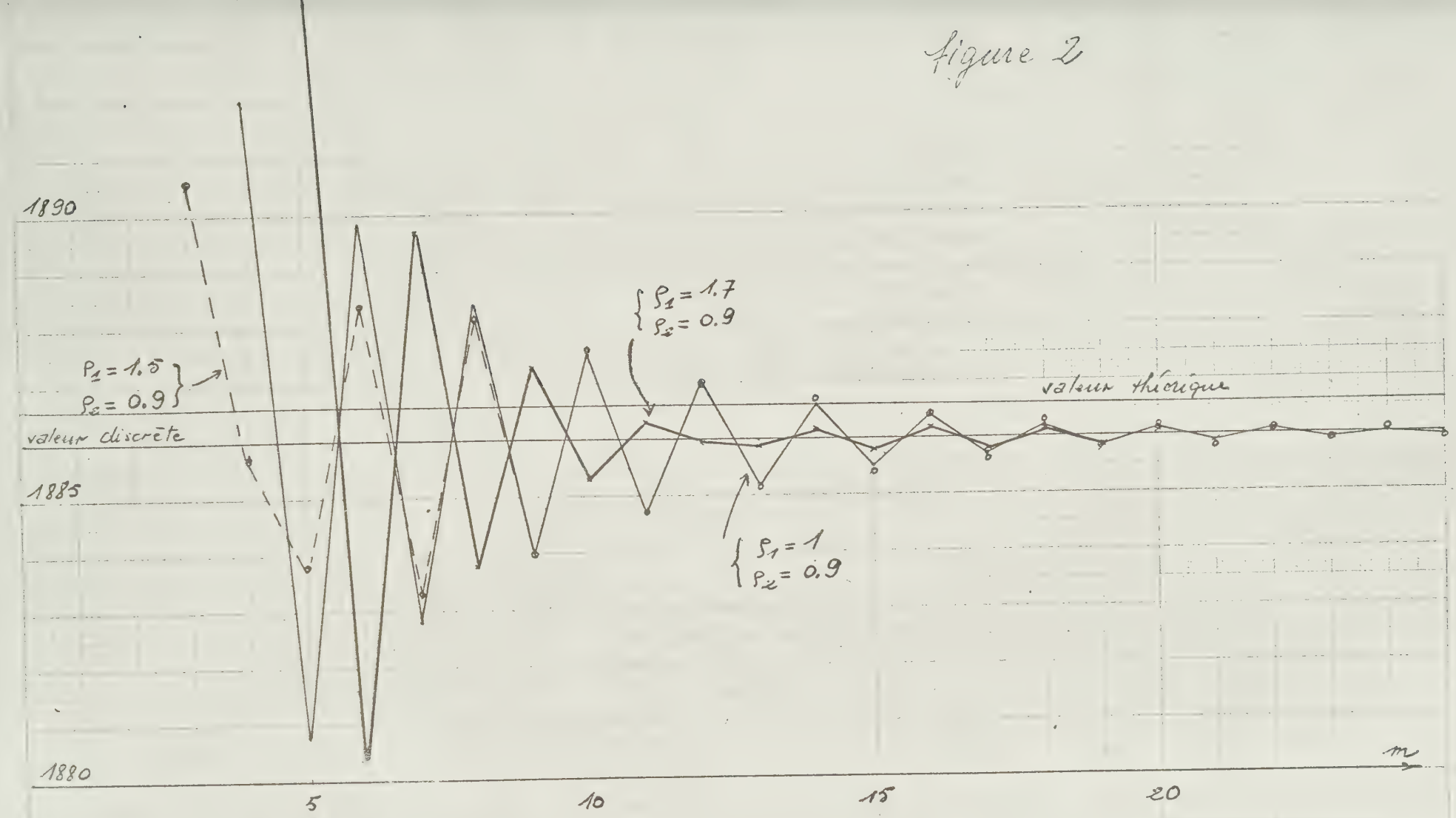


figure 1
1895
1890
1885
ρ = 1/15
ρ = 0.6
ρ = 0.1
ρ = 0.8
ρ = 0.9
ρ = 0.7
valeur discrète
10
20
30

figure 2


1890
1885
1880
valeur discrète
valeur théorique
$\rho_1 = 1.5$
$\rho_2 = 0.9$
$\rho_1 = 1.7$
$\rho_2 = 0.9$
$\rho_1 = 1$
$\rho_2 = 0.9$
m
5
10
15
20

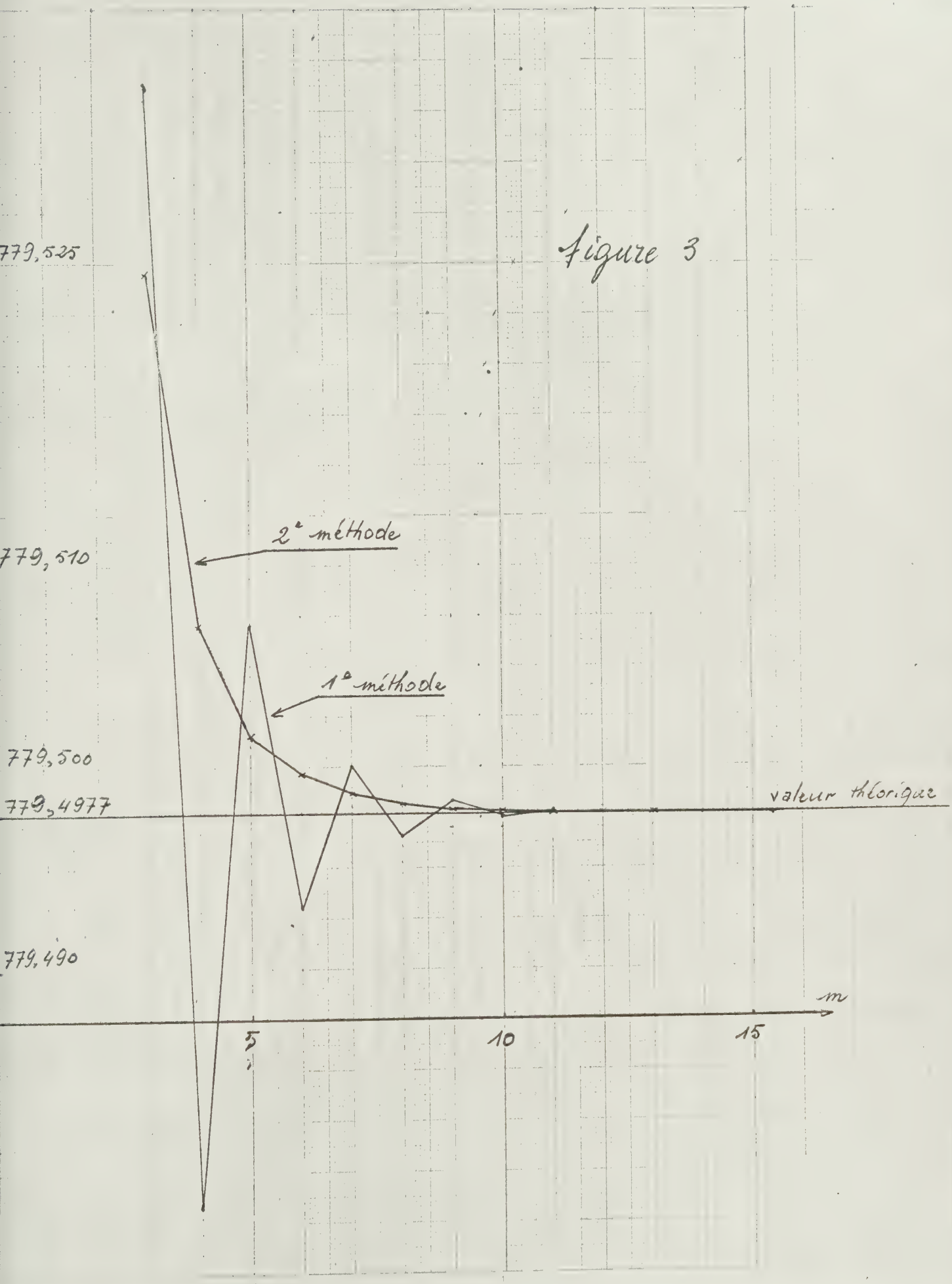


figure 3
779,525
779,510
779,500
779,4977
779,490
2° méthode
1° méthode
valeur théorique
m
5
10
15

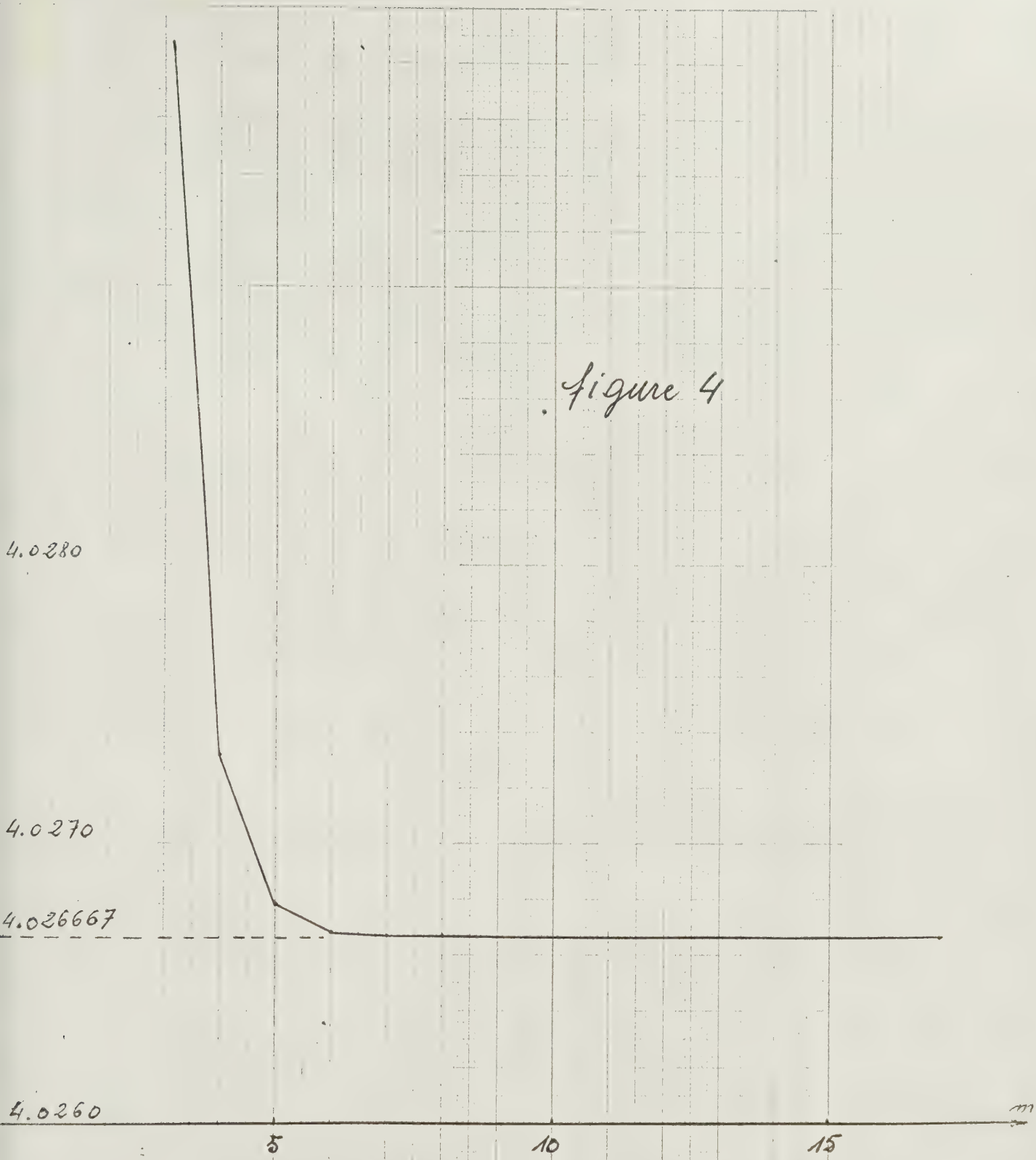


figure 4

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARROW (K.J.), HURWICZ (L.), UZAWA (H.). - Studies in linear and nonlinear programming. Stanford University Press, 1958.

[2] AUBIN (J.P.). - Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels, Thèse, Paris, 1966.

[3] AUSLENDER (A.). - Méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes, Thèse, Grenoble, 1969.

[4] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, chap. 1,2, Paris, Hermann.

[5] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques, chap. 3, 4, 5, Paris, Hermann.

[6] BENSOUSSAN (A.). - Etude de certains problèmes de jeux pour des systèmes décrits par des équations différentielles opérationnelles, IRIA, 1968.

[7] BENSOUSSAN (A.). - Contrôle optimal stochastique de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type parabolique, IRIA, 1968.

[8] BENSOUSSAN (A.), BOSSAVIT (A.), NEDELEC (J.C.). - Approximation des problèmes de contrôle optimal, IRIA, 1967.

[9] BERKOWITZ (L.D.), FLEMING (W.H.). - On differential games with integral pay-off, in Annals of Math. Study, n°39, Princeton Univ. Press, 1957, pp. 413-435.

[10] BERKOWITZ (L.D.). - A variational approach to differential games, in Ann. Math. Study, n°52, Princeton U.P., 1964, pp. 127-173.

[11] BOSSAVIT (A.). - Résolution numérique d'un problème de contrôle optimal, Institut Blaise Pascal, C.N.R.S., Paris, 1969.

[12] C E A (J.). - Approximation variationnelle des problèmes aux limites, Ann. Inst. Fourier, 14, 1964, pp. 345-444.

[13] C E A (J.). - Cours Ecole d'été d'Analyse numérique, 1969.

[14] CHENEY (E.W.). - Introduction to approximation theory, Mc Graw Hill, New York, 1966.

[15] CHENEY (E.W.), GOLDSTEIN (A.A.). - Newton's method for convex programming and Tchebycheff approximation, Numerische Matematik, 5, 1959, pp. 253-268.

[16] DANSKIN (J.M.). - The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[17] DELFOUR (M.C.), MITTER (S.K.). - Reachability of perturbed systems and Min-sup problems, SIAM J. Control, vol. 7, n°4, nov. 1969.

[18] DEMYANOV (V.F.), RUBINOV (A.M.). - Minimization of functionals in normed spaces, SIAM J. Control, t.6, 1968, pp. 73-88.

[19] DEMYANOV (V.F.). - Algorithms for some minimax problems, J. Computer system sciences, vol. 2, 1968, pp. 342-380.

[20] DEMYANOV (V.F.). - On the minimization of the maximum deviation, Vestnik Leningrad Univ., 21, n°7, 1966, pp. 21-28.

[21] DEMYANOV (V.F.). - Successive approximations for finding saddle points, Soviet Math. Dokl ., vol. 8, n°2, 1967.

[22] DUNFORD (N.), SCHWARTZ (J.T.). - Linear operators, part 1, Interscience, New York, 1967.

[23] EDWARDS (R.E.). - Functional analysis, theory and applications, Holt, Rinehart and Winston, New-York, 1965.

[24] FLEMING (W.H.). - The convergence problem for differential games, II. Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, 1964, pp. 195-210.

[25] FRIEDMAN (A). - On the definition of differential games and the existence o Value and of saddle points.J. of Diff. Equations, Vol.7,N°1,1970,pp. 69-91

[26] GINDES (V.B.). - Optimal control in a linear system under conflict, J. SIAM Control, vol. 5, n°1, 1967, pp. 163-169.

[27] GOLDSTEIN (A.A.). - Constructive real analysis, Harper, 1967.

[28] HO (Y.C.), BRYSON (A.), BARON (S.). - Differential games and optimal pursui evasion strategies, IEEE Trans. Aut. Control, AC-10, 1965, pp. 385-389.

[29] ISAACS (R.). - Differential games, J. Wiley, traduit chez Dunod.

[30] JACOB (J.P.), POLAK (E.). - On a class of pursuit evasion problems, IBM report, R.J. 421, feb. 1967.

[31] JAKUBOWICZ (A.). - Thèse de 3e cycle, Paris, à paraître.

[32] KAKUTANI (S.). - A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J., t.8, 1941, pp. 457-459.

[33] KARLIN (S.). - Mathematical methods ans theory in games, programming and economics, vol. 1 et 2, Addison-Wesley pub. Comp., 1959.

[34] KELLEY (J.E.). - The cutting plane method for convex programming, J. of SIAM, vol. 8, n°4, dec. 1960, pp. 703-712.

[35] KELENDZHERIDZE (D.L.). - A pursuit problem, in the mathematical theory of optimal processes, Pontryagin, Bol'tanski, Gamkrelidze, Mischenko, Pergamon, 1964.

[36] KIRILLOVA (F.M.).- Applications of functional analysis to the theory of optimal processes, J. SIAM Control, vol. 5, n°1, 1967, pp. 25-50.

[37] LEMAIRE (B.). - Problèmes de MIN-MAX, séminaire Lions, analyse numérique, Paris, 1968/69, n°1.

[38] LEMAIRE (B.). - jeux dans les équations aux dérivées partilles, séminaire LIONS, analyse numérique, Paris, 1968-69, n°13.

[39] LEMAIRE (B.). - Communication au colloque d'analyse numérique d'Aussois C.N.R.S., 1969.

[40] LEMAIRE (B.). - Communication au colloque sur l'optimisation de Nice, 1969, compte-rendu à paraître chez Springer-Verlag.

[41] LEMAIRE (B.). - Communication au IV° Congrès des mathématiciens d'expression latine, Bucarest-Braşov, sept. 1969.

[42] LEMONNIER (P.). - Thèse de 3° cycle, Paris, à paraître.

[43] LIONS (J.L.). - Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Paris, Dunod-Gauthier-Villars, 1968.

[44] LIONS (J.L.). - Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[45] LIONS (J.L.), MAGENES (E.). - Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1 et 2, Paris, Dunod, 1968.

[46] MOREAU (J.J.). - Théorèmes inf. sup, CRAS, Paris 258, 1964, pp. 2720-2722.

[47]MOREAU (J.J.). - Fonctionnelles convexes, séminaire sur les équations aux dérivées partielles II, Collège de France, 1966/67.

[48] NICOLAS (J.B.). - Théorème du minimax et application à la théorie du potentiel, Thèse de 3° cycle, Paris, 1968.

[49] PONTRYAGIN (L.S.), MISCHENKO (E.F.). - Linear differential games, Dokl. Akad. Nauk, SSSR, t. 174, 1967, n°1.

[50] PORTER (W.A.). - On function space pursuit-evasion games, J. SIAM Control, vol. 5, n°4, 1967, pp. 555-574.

[51] PSCHENICHNYI (B.N.). - Linear differential games, Avtomatika i telemekanika 1968, pp. 65-78.

[52] PSCHENICHNYI (B.N.). - Convex programming in a normalized space, Cybernetics, 1-5 (1965), 46-57.

[53] RAVIART (P.A.). - Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, Thèse, Paris 1965.

[54] RIESZ (F.), NAGY (B.SZ.). - Leçons d'analyse fonctionelle, Paris, Gauthier-Villars, Budapest, Akademiai Klado, 1955.

[55] ROCKAFELLAR (R.T.). - Minimax theorems and conjugate saddle functions, Math. Scand. t. 14, 1964, pp. 151-173.

[56] ROCKAFELLAR (R.T.). - Characterization of the subdifferentials of convex functions, Pacific J. of Math., vol. 17, n°3, 1966.

[57] SHIFFMAN (M.). - On the equality of min max = max min and the theory of games, RAND corporation, RM-243, 1941.

[58] SION (M.). - On general minimax theorems, Pacific J. of Math., t.8, 1958, pp. 171-176.

[59] SIBONY (M.). - Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone, Thèse, Paris, 1969.

[60] TANTER (A.). - Thèse de 3° cycle, Paris, à paraître.

[61] TREMOLIERES (R.). - Algorithmes pour la résolution de problèmes posés sous la forme min max f(x, y), IRIA, 1969.

[62] VAINBERG (M.M.). - Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, 1964.

[63] VALADIER (M.). - Quelques propriétés des sous-gradients, IRIA, 1968.

[64] VARAIYA (P.P.). - On the existence of solutions to a differential game, J. SIAM Control, vol. 5, n°1, 1967, pp. 153-162.

[65] VARAIYA (P.), LIN(J.). - Existence of saddle points in differential games. J. SIAM Control, vol. 7, N°1, 1969, pp. 141-157.

[66] VON NEUMANN (J.), MORGENSTERN (O.). - Theory of games and economic behaviour, 2nd édition, Princeton University Press, 1953.

[67] YOSIDA (K.). - Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

EQUIVALENCE OU SINGULARITE DES POCESSUS GAUSSIENS

Vu et approuvé

Paris, le 5 JANVIER 1971

Le Doyen de la Faculté des Sciences

L. GAUTHIER

Vu

et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

R. MALLET